



Выпуск 3 (208)

Математическое моделирование в решении прикладных задач

Федеральное агентство
железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Уральский государственный
университет путей сообщения»
(УрГУПС)

Выпуск 3 (208)

Математическое моделирование в решении прикладных задач

Екатеринбург
УрГУПС
2015

УДК 54-74
М38

Математическое моделирование в решении прикладных задач : сб. науч. тр. / [под науч. ред. Г. А. Тимофеевой, д-ра физ.-мат. наук и О. В. Куликовой, канд. пед. наук]. — Екатеринбург : УрГУПС, 2015. — Вып. 3 (208). — 87, [1] с.

Материалы настоящего сборника подготовлены преподавателями, научными сотрудниками, аспирантами и студентами Уральского государственного университета путей сообщения и его филиалов. Тематика публикаций распределена по трем разделам: «Математическое моделирование физических и информационных процессов и явлений», «Математическое и дидактическое моделирование учебного процесса в вузе», «Математическое моделирование в исследовательской деятельности студентов».

Математическое моделирование как универсальный инструмент познания привлекает внимание многих исследователей. Освоение его методологии дает возможность устанавливать объективные закономерности разнообразных систем, процессов и явлений окружающей действительности. Привлечение студентов к написанию научных статей позволяет не только активизировать развитие профессионально-личностного потенциала преподавателей, но и создать в совместном творчестве оригинальную интерпретацию полученных результатов исследовательской деятельности.

Материалы сборника предназначены для преподавателей, научных сотрудников, аспирантов, магистрантов, студентов и всех, кто проявляет интерес к вопросам математического моделирования.

УДК 54-74

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета университета*

Рецензенты:

В. К. Першин, д-р физ.мат. наук (УрГУПС);
Н. В. Казанцева, д-р физ.мат. наук (ИФМ УрО РАН)

© Уральский государственный
университет путей сообщения
(УрГУПС), 2015

Содержание

Раздел 1. Математическое моделирование

физических и информационных процессов и явлений	4
<i>Бердников К. В., Стружанов В. В.</i> Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния сферического сосуда, материал которого обладает эффектом деформационного разупрочнения.....	4
<i>Геут Кр. Л., Титов С. С.</i> Об актуальности построения неприводимых бинарных многочленов	11
<i>Розенберг В. Л., Мельникова Л. А.</i> Применение сферической блоковой модели к изучению глобальной сейсмичности	17
<i>Бахарева Е. А., Стружанов В. В.</i> Расчет напряжений в круглых стержнях из частично пластического разупрочняющегося материала при кручении.....	25
<i>Филиппова Е. Г., Титов С. С.</i> Задача о радиусе покрытия кода Рида — Маллера первого порядка.....	36

Раздел 2. Математическое и дидактическое

моделирование учебного процесса в вузе	43
<i>Куликова О. В., Чуев Н. П.</i> Математическое моделирование процесса освоения учебного материала в заданный временной интервал.....	43
<i>Пирогова И. Н.</i> Проблемы недостаточной подготовки абитуриентов по математике и обучение в высшей школе	49
<i>Куталова Е. А., Неймышева С. А.</i> Решение кейс-заданий по математике в рамках федерального интернет-экзамена в сфере профессионального образования	55

Раздел 3. Математическое моделирование

в исследовательской деятельности студентов	59
<i>Букина Е. А., Ванцева О. О., Филиппов М. Ю., Геут Кр. Л.</i> Автоматизация алгоритма расширения бинарных полей	59
<i>Волкова Т. А., Квашнина С. А.</i> Расчет скорости вытекания жидкости из цистерн	65
<i>Волкова Т. А., Сафронов Д. В.</i> Влияние веса и тяги поезда на его скорость.....	70
<i>Чуев Н. П., Горохова К. О.</i> О построении дискретно- непрерывной математической модели динамики численности подвижного состава	76

Раздел 1.

Математическое моделирование физических и информационных процессов и явлений

К. В. Бердников, Институт машиноведения УрО РАН
В. В. Стружанов, д-р физ.-мат. наук, Уральский государственный
университет путей сообщения, гл. научн. сотрудник Института
машиноведения УрО РАН

Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния сферического сосуда, материал которого обладает эффектом деформационного разупрочнения

Введение

В задачах механики деформируемого твердого тела, включающих в рассмотрение стадию деформационного разупрочнения, одной из актуальных проблем является разработка специализированных методик расчета напряженно-деформированного состояния [1–3]; в таких задачах не выполняется требование единственности решения из условий корректности в смысле Адамара [4]. При этом важное место занимает математическая формализация предлагаемых алгоритмов. В настоящей работе на примере задачи деформирования сферического сосуда под действием внешнего давления предлагается алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния континуальных систем с разупрочнением. Алгоритм формализован в форме метода простых итераций, установлен также механический смысл этого метода в рассматриваемой задаче.

Краевая задача

Рассмотрим толстостенный сферический сосуд, внешний радиус которого равен b , а внутренний — a . Пусть деформирование сосуда происходит под действием равномерного внешнего давления p . Считаем величину p такой, что при деформировании сосуда часть материала может переходить в область разупрочнения. Поскольку условия полярной симметрии выполняются, то перемещения точек сферы происходят только в радиальном направлении $u = u(r)$, а ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций являются радиальная и тангенциальная составляющие $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi(r)$, $\varepsilon_r(r)$, $\varepsilon_\theta(r) = \varepsilon_\varphi(r)$ [5]. В качестве модели материала принимается модель Генки с разупрочнением, единая кривая которой имеет ниспадающий участок [6, 7].

Для вывода уравнения равновесия воспользуемся вариационным принципом Лагранжа, который справедлив вне зависимости от принимаемого в рассмотрение типа материала. В изотермическом процессе активного деформирования, когда приращение свободной энергии отождествляется с элементарной работой напряжений (среда Генки), функция свободной энергии с учетом разупрочнения материала имеет вид [6, 7]

$$F(\varepsilon_0, \Gamma) = F(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi) = \frac{1}{6} K \theta^2 + \int_0^\Gamma G^s(\Gamma) d\Gamma.$$

Тогда F представляет собой работу внутренних сил и, кроме того, является потенциалом напряжений $\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$. Полная работа деформаций всего тела равна

$$W = \int_V F dV.$$

В рассматриваемом случае нагружения из действующих на тело внешних сил имеется только распределенное внешнее давление p , поэтому согласно вариационному принципу Лагранжа [8] имеем

$$\delta W = \int_S p \delta u dS. \quad (1)$$

Расписывая левую часть равенства и учитывая выполнение условий полярной симметрии, получаем

$$\delta W = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r} \delta \varepsilon_r + 2 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta} \delta \varepsilon_\theta \right) dV. \quad (2)$$

Так как $\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \nabla u$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$, $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r} = \sigma_r$, $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta} = \sigma_\theta$,

то $\delta \varepsilon_r = \nabla \delta u$, $\delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \delta u$.

Тогда $\delta W = \int_V \sigma_r \nabla \delta u dV + 2 \int_V \frac{\sigma_\theta}{r} \delta u dV$.

Объемный интеграл, фигурирующий в первом слагаемом, с помощью теоремы Гаусса — Остроградского сводим к поверхностному интегралу:

$$\int_V \sigma_r \nabla \delta u dV = \int_S \sigma_r \cdot \vec{n} \delta u dS - \int_V \nabla \sigma_r \cdot \delta u dV.$$

Применяя соответствующие дериационные формулы [9], имеем

$$\nabla \sigma_r = \nabla(\sigma_r \cdot \vec{e}_r) = \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_r \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta;$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r \cdot \vec{e}_r) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \vec{e}_r + \sigma_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{d\sigma_r}{dr} \vec{e}_r;$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_r \cdot \vec{e}_r) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \sigma_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \sigma_r \cdot \vec{e}_\theta.$$

Тогда $\nabla \sigma_r = \nabla(\sigma_r \cdot \vec{e}_r) = \frac{d\sigma_r}{dr} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r + \frac{2}{r} \sigma_r \cdot \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} \sigma_r$.

Подставляя все вычисленные выражения в (2), получаем

$$\delta W = \int_V \left(-\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2}{r} \sigma_r + \frac{2}{r} \sigma_\theta \right) \cdot \delta u dV + \int_S \sigma_r \cdot \vec{n} \delta u dS,$$

окончательно имеем

$$\int_V \left(-\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2}{r} \sigma_r + \frac{2}{r} \sigma_\theta \right) \cdot \delta u dV + \int_S \sigma_r \cdot \vec{n} \delta u dS = \int_S p \delta u dS.$$

Отсюда в силу независимости вариаций δu получаем уравнение равновесия и граничные условия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}\sigma_r - \frac{2}{r}\sigma_\theta = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_r(a) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_r(b) = -p. \quad (5)$$

Для получения полной системы уравнений по определению напряженно-деформированного состояния сферического сосуда уравнение равновесия необходимо дополнить соотношениями Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (6)$$

а также физическими соотношениями для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) - 2\mu\varepsilon_r^p - \lambda(\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p), \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) - 2\mu\varepsilon_\theta^p - \lambda(\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — коэффициенты упругости

Ляме. Здесь E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Приращение неупругих составляющих возможно определить, используя инкрементальный закон пластичности [6]

$$d\gamma^p = \left(1 - \frac{G^p}{G}\right) d\gamma, \quad (8)$$

где $d\gamma^p$ — приращение пластических (неупругих) деформаций сдвига; $d\gamma$ — приращение полных деформаций сдвига; G^p — инкрементальный модуль, определяемый касательной к единой кривой $T(\Gamma)$.

Отметим, что при выполнении условий полярной симметрии связь между интенсивностями деформаций сдвига и сдвиговыми деформациями дается соотношением $\Gamma = \frac{2\gamma}{\sqrt{3}}$, между касательными напряжениями и их интенсивностями — $T = \frac{\tau}{\sqrt{3}}$ [9].

Итерационный алгоритм

В данной задаче объемная деформация не влияет на поврежденность материала [10], поэтому в качестве представителей напряженно-деформированного состояния естественно рассматривать максимальные касательные напряжения τ и максимальные сдвиговые деформации γ .

Пусть при некотором значении $P = P_0$ сферический сосуд находится в равновесии и в каждой точке известны свойства материала. А именно: известна область разупрочнения $r_0^B < r < b$. В ней известны касательный модуль G_0^P и предел прочности τ_0^B . В упругопластической области $r_0^T < r < r_0^B$ известны касательный модуль G_0^P и предел текучести τ_0^T . В упругой области $a < r < r_0^T$ — модуль сдвига G и предел текучести τ_0^T . Кроме того, известно напряженно-деформированное состояние: $\tau_0(r)$ — максимальное касательное напряжение, $\gamma_0(r)$ — максимальный сдвиг, $\gamma_0^P(r)$ — остаточный максимальный сдвиг.

Пусть оператор $A_0(0, P)$ является решением упругой задачи, то есть ставит в соответствие заданному давлению P тензоры ε и σ . $A_n(\varepsilon^P, P)$ — оператор, ставящий в соответствие тензору ε^P и давлению P тензор совместных деформаций ε' и тензор остаточных напряжений σ'' . При этом компоненты тензора неупругих деформаций связаны с компонентами тензора полных деформаций инкрементальным законом пластичности (8). Таким образом, итерационную процедуру расчета НДС в общем виде можно представить в форме метода простой итерации (α — совокупность всех компонент перемещения, тензора напряжений, тензора деформаций).

$$\alpha_{n+1} = A_{n+1}\alpha_n, \quad n \geq 0;$$

$$\alpha_0 = A_0(0, \Delta P);$$

$$A_n = A_n(d\varepsilon^P, \Delta P);$$

$$d\varepsilon^P = (I - SC^P)d\varepsilon.$$

Здесь ΔP — приращение давления. Выпишем в явном виде операторы A_n и A_0 . Поскольку в рассматриваемой задаче в качестве представителей напряженно-деформированного состояния принимаются максимальный сдвиг и максимальное касательное напряжение, то компонентами α можно считать только γ и τ . Тогда [5, 11]

$$A_0(0, \Delta P) = \begin{pmatrix} -\frac{3b^3}{4G(b^3 - a^3)} \Delta P \frac{a^3}{r^3} \\ -\frac{3b^3}{4(b^3 - a^3)} \Delta P \frac{a^3}{r^3} \end{pmatrix},$$

$$A_n(d\gamma^p, \Delta P) = \begin{pmatrix} \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \left(\frac{3}{2} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{a^3}{r^3} \frac{b^3}{b^3 - a^3} \int_a^b \frac{d\gamma^p(r)}{r} dr + d\gamma^p(r) \right) \\ \frac{2E}{3(1-\nu)} \left(3 \frac{b^3}{b^3 - a^3} \int_a^b \frac{d\gamma^p(r)}{r} dr - 3 \int_a^r \frac{d\gamma^p(r)}{r} dr - d\gamma^p(r) \right) \end{pmatrix},$$

$$d\gamma^p = \left(1 - \frac{G^p}{G} \right) d\gamma.$$

Таким образом, на каждом итерационном шаге алгоритма вычисляются последующие приближения к решению исходной задачи, а также определяются новые значения касательного модуля G^p и границ области разупрочнения материала r^B и упругопластической области r^T .

Механический смысл метода простой итерации

Часть материала, прилегающего к поверхности внешней сферы, при деформировании приобретает остаточную деформацию, которая входит в формулировку исходной краевой задачи и заранее неизвестна. Поэтому исходная задача разбивается на основную и корректирующую задачи. Основная представляет собой классическую задачу теории упругости, решение которой известно [5]. Корректирующая задача — это задача по определению остаточных самоуравновешенных напряжений. Ее решение приведено в работе [11]. Сначала решается основная задача и по найденным полным деформациям с помощью инкрементального закона пластичности определяются их неупругие составляющие. Кроме того, вычисляется область пластичности и область разупрочнения. Затем найденная неупругая составляющая подставляется в корректирующую задачу, решение которой складывается с решением основной задачи (первая корректировка). Для суммарных совместных деформаций снова определяется неупругая составляющая, вычисляются области пластичности и разупрочнения, затем производится следующая корректировка. И так далее.

Заключение

Приведен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния толстостенного сферического сосуда, материал которого может переходить на стадию разупрочнения. Показано, что алгоритм можно представить в форме метода простой итерации. На примере рассматриваемой задачи установлен механический смысл метода простой итерации в задачах механики разупрочняющихся тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00186) и при частичной поддержке молодежного научного проекта президиума УрО РАН № 14-1-НП-54.

Литература

1. Стружанов В. В., Жижерин С. В. Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчета напряженного состояния при кручении // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5. № 2. С. 92–104. ISSN 1560-7534.
2. Стружанов В. В., Бахарева Е. А. Математические методы в теории чистого изгиба прямоугольных балок из разупрочняющегося материала с симметричной диаграммой растяжения-сжатия // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 158–167. ISSN 1999-6691.
3. Стружанов В. В., Бердников К. В. Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности расширяющейся сферической полости в упругопластическом пространстве с разупрочнением // Математическое моделирование системных взаимосвязей в прикладных исследованиях : сб. научн. тр. под редакцией д-ра физ.-мат. наук Г. А. Тимофеевой, канд. пед. наук О. В. Куликовой. Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2013. Вып. 13 (196). С. 44–48.
4. Стружанов В. В., Бахарева Е. А. Неустойчивые состояния материала и сопутствующие математические проблемы // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. А. Толоконникова, Тула, 16–20 сентября 2013 г., Тула : Изд-во ТулГУ, 2013. С. 469–470. ISSN 2077-0200.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.
6. Стружанов В. В., Бердников К. В. Об определяющих соотношениях среды Генки для разупрочняющегося материала при диагональном тензоре деформаций // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. (Сер. : Физ.-мат. науки), 2012. № 3 (28). С. 72–80. ISSN 1991-8615.

7. Стружанов В. В., Бердников К. В. Свойства среды Генки с разупрочнением при полярно-симметричном деформировании // Динамика сплошной среды (Механика структурно-неоднородных сред). Новосибирск : Институт гидродинамики СО РАН. 2012, Вып. 127. С. 97–99. ISSN 0420-0497.
8. Ильюшин А. А. Пластичность, Ч. 1 : Упруго-пластические деформации / Науч. предисловие Е. И. Шемякина, И. А. Кийко, Р. А. Васина / Репр. воспр. текста изд. 1948 г. / М. : Логос, 2004. 388 с. ISBN 5-94010-377-4.
9. Лурье А. И. Теория упругости. М. : Наука, 1970. 940 с.
10. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 1995. 192 с.
11. Бердников К. В., Стружанов В. В. Остаточные напряжения в батискафе после погружения на большую глубину // Вестник УрГУПС. № 3 (19). 2013. С. 8–17. ISSN 2079-0392.

Кр. Л. Геут, С. С. Титов, д-р физ.-мат. наук,
Уральский государственный университет путей сообщения

Об актуальности построения неприводимых бинарных многочленов

Неприводимые многочлены над конечными полями сравнимы с простыми числами в натуральном ряду, в том числе и по значимости. Они нашли широкое применение в различных областях математики, теории кодирования, передачи информации [1–3]. Так, представление битовых строк как информационных многочленов приводит к изучению бинарных многочленов, т. е. многочленов над полем из двух элементов $GF(2)$. В настоящее время поиск таких неприводимых многочленов производится подбором или с помощью вероятностных алгоритмов, требующих больших временных и программных ресурсов, поэтому построение многочленов с заданными свойствами, в том числе неприводимых многочленов, остается актуальной задачей.

Коэффициенты многочленов над конечными полями характеристики два можно интерпретировать в многобитовые последовательности для передачи по современным каналам связи [4]. Такая

последовательность является уникальной и может быть использована в целях аутентификации, например: реализация электронной цифровой подписи на эллиптических кривых, автомобильная сигнализация, отслеживание положения локомотива, связь диспетчера с машинистом [2, 3, 5, 6].

В устройствах связи ОАО «РЖД» предполагается применение системы GSM-R как основной системы технологической радиосвязи на участках высокоскоростного и скоростного движения, а также на основных транспортных магистралях. В системах GSM, GSM-R в качестве алгоритмов шифрования используются шифры семейства A5 [5]. Стандарт шифрования A5/1, используемый в GSM-R, можно считать примером кодирующего аппарата с обратной связью и без памяти.

Одним из таких кодирующих аппаратов является регистр сдвига с линейной связью (РСЛОС, Linear feedback shift register, LFSR). Он состоит из двух частей: собственно регистра сдвига и функции обратной связи. Регистр состоит из битов, его длина — количество этих бит, а цикл работы — период запрограммированного многочлена. Регистр сдвига — это инструмент для генерации псевдослучайной последовательности [6]. Для фиксации размеров этой последовательности при реализации конкретных задач необходимо подобрать неприводимый многочлен фиксированного порядка.

Возможно использование не только одного регистра сдвига, но и каскада устройств для достижения нужного объема выходных бит, как это происходит в стандарте GSM: 64 бита за счет трех регистров 19-го, 22-го, 23-го периодов соответственно.

Тематика бинарных полей тесно связана с изменением архитектуры в вычислительной технике: переход от битовой архитектуры к байтовой, от 32 разрядной к 64 разрядной, а в последствии к 1024 битовой. Так, шифр AES имеет архитектуру «квадрат» и работает с блоками из шестнадцати байтов. Распараллеливание операций, увеличение функционала видеокарт позволяет оптимизировать работу и ускорить работу процессора. Поэтому гибкая аппаратная компоновка видеокарт благодаря рациональной организации отводов регистров сдвига может позволить реализовать широкий спектр возможностей, в том числе и взлом шифров.

В теории кодирования неприводимые многочлены играют роль образующих, т. е. генераторных. Одним из примеров можно назвать коды Рида — Соломона: недвоичные циклические коды, позволяющие исправлять ошибки в блоках данных. Элементами кодового вектора являются не биты, а группы битов (блоки). Очень

распространены коды Рида — Соломона, работающие с байтами. Код Рида — Соломона является частным случаем БЧХ-кода, корни порождающего полинома которого лежат в том же поле, над которым строится код. Они широко используются в устройствах передачи и хранения данных для обнаружения и исправления как одиночных, так и многократных ошибок. Область их применения необычайно широка: кодеры/декодеры Рида — Соломона можно найти и в ленточных запоминающих устройствах, и в контроллерах оперативной памяти, и в модемах, и в жестких дисках, и в CD-ROM/DVD-приводах и т. д.

Особое значение в кодировании имеют симметричные* многочлены [6], максимально возможный порядок для таких многочленов равен $\left(1 + 2^{\frac{n}{2}}\right)$, где n — степень неприводимого симметричного многочлена. Рассмотрим подробнее задачу генерации таких многочленов простого порядка.

Пусть p — простое число, и пусть $g_{p-1}(x)$ разлагается в произведение симметричных многочленов степени $2k$; тогда имеем: $g_{p-1}(x)$ делит g_{2^k} , т. е. $2^k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, т. к. $p = \text{ord } f(x)$ для $f(x)$, делящего $g_{p-1}(x)$.

Обратно, пусть p — простое число, k — наименьшее такое, что $2^k \equiv -1 \pmod{p}$. Тогда $g_{p-1}(X)$ делит g_{2^k} (и такая степень двойки в индексе — наименьшая возможная), отсюда $g_{p-1}(X)$ разлагается в произведение неприводимых симметричных многочленов степеней $2m$, где k/m нечетно, отсюда $k = m$, т. к. ясно, что если p — простое число и $g_{p-1}(x)$ разлагается в произведение неприводимых

многочленов $q_j(X) (j \geq 1)$ одной и той же степени. Пусть $\deg f = n$, $\text{ord } f = p$, $f(x)$ неприводим, тогда $|\langle x \rangle| = p$ в $K_f \approx GF(2^n)$, и для любого $y \neq 1$, $y \in \langle x \rangle$ имеем $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ (т. к. p — простое число); следовательно, никакой $y \neq 1$, $y \in \langle x \rangle$ не принадлежит собственному подполю поля $GF(2^n) \approx K_f$, т. е. y удовлетворяет неприводимому уравнению той же степени n [2–3].

Степень таких неприводимых многочленов определяется как наименьшая натуральная степень n такая, что $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Соответственно, их количество $j = \frac{p-1}{n}$. В случае если неприводимых многочленов $q_j(x) (j \geq 1)$ искомого порядка два, то их поиск

Степень таких неприводимых многочленов определяется как наименьшая натуральная степень n такая, что $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Соответственно, их количество $j = \frac{p-1}{n}$. В случае если неприводимых многочленов $q_j(x) (j \geq 1)$ искомого порядка два, то их поиск

*Симметричные (самовозвратные) многочлены — многочлены, у которых коэффициенты симметричны относительно центрального бита.

сводится к нахождению наибольшего общего делителя многочленов

$$s(X) = \sum_{i=1}^n X^{2^i} \pmod{p} \text{ и } t(X) = \sum_{i=0}^{p-1} X^i \Leftrightarrow t(X) = \sum_{i=1}^p X^i \quad (\text{выбор формулы})$$

зависит от значения следа многочлена $q_j(X)$). Если же таких многочленов $q_j(X) > 2$, то задача сложнее, т. к. НОД в таком случае будет произведением всех $q_j(X)$ с заданным значением следа $Tr(x) = \{0, 1\}$ [7–8].

Для примера рассмотрим многочлены $\text{ord } f = 73$.

Степень многочленов такого порядка является решением уравнения $2^n \equiv 1 \pmod{73}$ (таблица 1).

Таблица 1

Решение уравнения $2^n \equiv 1 \pmod{73}$

n	$2^n \pmod{73}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	55
8	37
9	1

Получаем $n = \deg f(X) = 9$, $(73-1)/9 = 8$, т. е. восемь неприводимых многочленов порядка $\text{ord } f(X) = 73$ и степени $\deg f(X) = 9$, которые можно представить в виде $X^9 + \sigma_1 X^8 + \sigma_2 X^7 + \sigma_3 X^6 + \sigma_4 X^5 + \sigma_5 X^4 + \sigma_6 X^3 + \sigma_7 X^2 + \sigma_8 X + \sigma_9$, где $\sigma_i = \{0, 1\}$. Произведение таких многочленов $f(x)$ дает сумму всех степеней от 0 до 72 (или от 1 до 73) $t(X) = \sum_{i=1}^{73} X^i$. $2^k \not\equiv -1 \pmod{73}$, поэтому в данном примере четыре пары взаимобратных* многочлена.

*Периодический (взаимобратный) многочлен – многочлен с периодом, равным единице. Они существуют «парами» и найти многочлен периодический к данному можно, зеркально отразив биты относительного центрального.

Сумма степеней $s(X) = \sum_{i=1}^9 X^{2^i} \bmod 73$, равная 0 (или 1), кратна каждому из многочленов $f(X)$ со значением следа $Tr(x) = \sigma_1 = 0$ (1). Поэтому для $s(x) = 0$ НОД $[s(X), t(X)] = \Pi f(X)$ с $Tr(x) = 0$.

Найдем

$$\begin{aligned} u_1(X) &= \text{НОД}[s(X), t(X)] = \text{НОД}[X^{73} + X^{72} + X^{71} + X^{70} + X^{69} + \dots + \\ &+ X^2 + X; X^{64} + X^{55} + X^{37} + X^{32} + X^{16} + X^8 + X^4 + X^2 + X] = \\ &= X^{45} + X^{43} + X^{41} + X^{37} + X^{36} + X^{35} + X^{34} + X^{32} + X^{31} + X^{28} + \\ &+ X^{26} + X^{22} + X^{21} + X^{19} + X^{18} + X^{17} + X^{16} + X^{15} + X^{14} + X^{12} + \\ &+ X^7 + X^6 + X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Многочлен $u(X)$ является произведением пяти многочленов $q_i(X)$ степени $\deg q_i(X) = 9$ со значениями следа $Tr(x) = 0$. Для вы-

числения $q_i(X)$ воспользуемся теоремой Виета: $\sigma_2 = \sum_{i \neq j} X^{2^i} X^{2^j} \bmod 73$,

$\sigma_3 = \sum_{i \neq j \neq k} X^{2^i} X^{2^j} X^{2^k} \bmod 73$ и т.д. При фиксации значений σ_i по-

иск НОД $[u_i(X), \sigma_i]$ дает многочлен или произведение многочленов (если их несколько) со значением σ_i и позволяет построить все неприводимые многочлены данного порядка.

В нашем примере искомые многочлены следующие:

$$X^9 + X + 1 \text{ (1000000011);}$$

$$X^9 + X^8 + 1 \text{ (1100000001);}$$

$$X^9 + X^4 + X^2 + X + 1 \text{ (1000010111);}$$

$$X^9 + X^8 + X^7 + X^5 + 1 \text{ (1110100001);}$$

$$X^9 + X^6 + X^3 + X + 1 \text{ (1001001011);}$$

$$X^9 + X^8 + X^6 + X^3 + 1 \text{ (1101001001);}$$

$$X^9 + X^6 + X^5 + X^2 + 1 \text{ (1001100101);}$$

$$X^9 + X^7 + X^4 + X^3 + 1 \text{ (1010011001).}$$

Период регистра связи, запрограммированный одним из приведенных выше многочленов, равен 73, т. е. при работе в автономном режиме регистр выдаст неповторяющуюся последовательность в 73 бита.

Итак, в данной работе описан способ построения неприводимых многочленов, нашедших широкое применение в различных областях математики и технических наук. Эти результаты могут иметь криптографические приложения.

Литература

1. Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования / пер. с англ. / под ред. С.Д. Бермана. М. : Мир, 1971. 480 с.
2. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: алгебраические и алгоритмические основы. М. : КомКнига, 2006. 328 с. ISBN 5-484-00443-8.
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля : в 2-х т. Т. 1 / пер. с англ. М. : Мир, 1988. 430 с. ISBN 5-03-000065-8.
4. Паршин А.В. Классический протокол пакетной коммутации : монография. Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2007. 242 с. ISBN 978-5-94614-063-8
5. Kazeka A. Security model evaluation of 3G Wireless Networks. Colorado State University. 15 с.
6. Сапожников В.В. Теоретические основы железнодорожной автоматики и телемеханики : учебник для вузов ж.-д. транспорта / Сапожников В.В., Кравцов Ю.А., Сапожников Вл.В. / под ред. В.В. Сапожникова. М. : ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2008. 394 с. ISBN 978-5-89035-444-0.
7. Геут К.Л., Титов С.С. О генерации неприводимых многочленов простых порядков для построения дискретных устройств СЖА-ТиС // Транспорт Урала, 2014. № 1 (40). С. 61–64. ISSN 1815-9400.
8. Геут Кр.Л., Титов С.С. О генерации неприводимых многочленов // Математическое моделирование системных взаимосвязей в прикладных исследованиях : сб. науч. тр. Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2013. Вып. 13 (196). С. 12–18. ISBN 978-5-94614-277-9.

В. Л. Розенберг, канд. физ.-мат. наук, Уральский государственный университет путей сообщения, ст. научн. сотр. Института математики и механики УрО РАН
Л. А. Мельникова, Институт математики и механики УрО РАН

Применение сферической блоковой модели к изучению глобальной сейсмичности

Статистический анализ сейсмичности как пространственно-временной последовательности землетрясений на основе каталогов зарегистрированных событий крайне затруднен ввиду короткой истории надежных инструментальных наблюдений. Явления, обнаруженные в реальных каталогах землетрясений, могут быть единичными и не повторяться в будущем. Искусственные же каталоги, полученные путем численного моделирования, могут покрывать длительные интервалы времени, что позволяет анализировать значимость исследуемых свойств сейсмического потока, в частности, выявлять/подтверждать закономерности, предшествующие сильным толчкам, что может быть востребовано в экспертных системах мониторинга регионального и глобального сейсмического риска [1, 2]. Основным результатом моделирования сейсмичности литосферы является искусственный каталог землетрясений, в котором каждое событие характеризуется моментом времени, координатами эпицентра, глубиной, магнитудой и в некоторых моделях, учитывающих геологическое строение региона, интенсивностью. Моделирование динамики земной коры предполагает получение поля скоростей движения точек на разных глубинах, действующих сил, обусловленных ими смещений, а также характера взаимодействия структурных элементов. В настоящей работе, являющейся продолжением исследований [3–5], представлены некоторые результаты новых вычислительных экспериментов с блоковой структурой, аппроксимирующей глобальную систему тектонических плит.

Сферическая блоковая модель: краткое описание

Предполагается, что блоковая структура является ограниченной и односвязной частью шарового слоя глубиной H , заключенного между двумя концентрическими сферами, одна из которых (внешняя) интерпретируется как поверхность Земли, другая

(внутренняя) — как нижняя граница упругой литосферы. Разделение структуры на блоки определяется пересекающимися этот слой бесконечно тонкими разломами, каждый из которых представляет собой коническую поверхность, наклоненную под определенным углом к внешней сфере. Общие точки двух разломов на внешней и внутренней сферах называются вершинами. Участки разломов, ограниченные соответствующими парами соседних вершин, называются сегментами. Пересечения блока с ограничивающими сферами представляют собой сферические многоугольники, при этом пересечение с нижней (для блока) сферой называется подошвой. Предполагается, что вне блоковой структуры могут находиться граничные блоки, примыкающие к внешним сегментам. Другая возможность состоит в рассмотрении блоковой структуры, замкнутой на сфере. Для учета неоднородности литосферы предусмотрена возможность задания различных глубин (в пределах H) для разных блоков и учета зависимости вязко упругих свойств разлома от его глубины. Все блоки считаются абсолютно жесткими, а их смещения — бесконечно малыми по сравнению с линейными размерами, поэтому геометрия блоковой структуры не меняется в процессе моделирования, и структура не движется как единое целое. Блоки имеют шесть степеней свободы; смещение каждого блока состоит из поступательной и вращательной компонент. Предполагается, что законы движения граничных блоков и подстилающей среды известны, при этом движение описывается как вращение на сфере, т. е. задаются положение оси вращения и угловая скорость.

Жесткость блоков приводит к тому, что деформации имеют место только на разломах и подошвах блоков; силы возникают на подошвах из-за смещения блоков относительно подстилающей среды и на поверхностях ограничивающих их разломов из-за смещений соседних блоков или их подстилающей среды. Приведем формулы для определения упругой силы (f_t, f_l, f_n) , действующей на единицу площади разлома:

$$f_t = K_t(\Delta_t - \delta_t), f_l = K_l(\Delta_l - \delta_l), f_n = K_n(\Delta_n - \delta_n). \quad (1)$$

Здесь (t, l, n) — система координат, связанная с точкой приложения силы (оси t, l лежат в плоскости, касательной к поверхности разлома, ось n ей перпендикулярна); $\Delta_t, \Delta_l, \Delta_n$ — компоненты относительного смещения в системе (t, l, n) соседних блоков в случае, если точка принадлежит части разлома, разделяющей блоки,

или блока и подстилающей среды соседнего блока в случае, если точка принадлежит части разлома, отделяющей блок от подстилающей среды соседнего блока; δ_t , δ_l , δ_n — соответствующие неупругие смещения, зависимость от времени которых описывается уравнениями

$$\frac{d\delta_t}{dt} = W_t f_t, \quad \frac{d\delta_l}{dt} = W_l f_l, \quad \frac{d\delta_n}{dt} = W_n f_n. \quad (2)$$

Коэффициенты K_t , K_l , K_n (1), характеризующие упругие свойства разлома, и коэффициенты W_t , W_l , W_n (2), характеризующие вязкие свойства разлома, могут быть различными для разных разломов и, кроме того, могут изменяться в зависимости от глубины.

Аналогично выглядят формулы для вычисления сил и неупругих смещений на подошвах блоков. Смещения любого внутреннего блока и углы его поворотов находятся из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих на блок, и суммарного момента этих сил. Это условие обеспечивает состояние квазистатического равновесия системы и одновременно является условием минимума энергии. Поскольку в рассматриваемой модели зависимость сил от смещений и поворотов блоков является линейной (явные формулы опущены ввиду их громоздкости, см. [4]), то система уравнений для определения этих величин также линейна и имеет вид

$$Aw = b. \quad (3)$$

Компонентами неизвестного вектора $w = (w_1, w_2, \dots, w_{6n})$ являются смещения и углы поворота внутренних блоков (n — число таких блоков). Элементы матрицы A (размерности $6n \times 6n$) не зависят от времени и могут быть вычислены один раз в начале процесса. Для подсчета различных криволинейных интегралов выполняется дискретизация (разбиение на ячейки) сферической поверхности подошв блоков и сегментов разломов, при этом предполагается, что значения сил и неупругих смещений совпадают для всех точек ячейки. Система (3) решается в дискретные моменты времени t_i .

В каждый момент t_i при вычислении компоненты силы, действующей на разломе, определяется безразмерная величина κ , трактуемая как модельное напряжение:

$$\kappa = \frac{\sqrt{f_t^2 + f_l^2}}{P - f_n}. \quad (4)$$

Здесь P — одинаковый для всех разломов параметр, который может интерпретироваться как разность между литостатическим и гидростатическим давлением. Таким образом, фактически величина k является отношением модуля силы, стремящейся сдвинуть блоки вдоль разлома, к модулю силы, прижимающей блоки друг к другу. Для каждого разлома задаются значения трех порогов прочности $B > H_f \geq H_s$, вообще говоря, зависящие от времени:

$$B = B(t_i) = B_0(t_i) + \sigma X(t_i), \quad H_f = H_f(t_i) = aB(t_i),$$

$$H_s = H_s(t_i) = bB(t_i). \quad (5)$$

Для всех i выполняется: $0 < B_0(t_i) < 1$, $0 < \sigma \leq 1$, $X(t_i)$ — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону $N(0; 1)$, $0 < a < 1$, $0 < b \leq a$. Предполагается, что начальные условия таковы, что неравенство $k < B$ имеет место во всех ячейках структуры. Взаимодействие между блоками (между блоком и соседней подстилающей средой) полагается вязкоупругим (нормальное состояние) до тех пор, пока величина k (4) на части разлома, разделяющего элементы структуры, не достигает заданного порога B . Такая ситуация интерпретируется как землетрясение. В ячейках, попавших в «критическое» состояние, в соответствии с законом сухого трения происходит резкий сброс напряжения посредством изменения значений неупругих смещений $\delta_t, \delta_l, \delta_n$ по формулам:

$$\delta_t^e = \delta_t + \gamma_t^e f_t, \quad \delta_l^e = \delta_l + \gamma_l^e f_l, \quad \delta_n^e = \delta_n + \gamma_n^e f_n, \quad (6)$$

где $\delta_t, f_t, \delta_l, f_l, \delta_n, f_n$ — значения неупругих смещений и компонент вектора силы непосредственно перед землетрясением. Коэффициенты $\gamma_t^e, \gamma_l^e, \gamma_n^e$ вычисляются таким образом, чтобы для нового значения модельного напряжения k было справедливо равенство $k = H_f$. После описанных выше пересчетов находится правая часть системы (3), затем определяются векторы сдвига и углы поворота блоков. Если вновь в какой-либо ячейке $k \geq B$, то вся процедура повторяется. Когда во всех ячейках на разломах $k < B$, вычисления продолжают по обычной схеме. Считается, что ячейки, в которых произошли землетрясения, находятся в состоянии крипа. Это означает, что для них в уравнениях (2) для вычисления значений неупругих смещений используются параметры $W_t^s (W_t^s \gg W_t)$, $W_l^s (W_l^s \gg W_l)$ и $W_n^s (W_n^s \gg W_n)$, обеспечивающие значительно более быстрый, по сравнению с нормальным состоянием, рост не-

упругих смещений и, следовательно, уменьшение значений сил и напряжений. Состояние крипа продолжается до тех пор, пока $k > H_s$, после чего ячейка возвращается в нормальное состояние с использованием при расчетах W_p , W_l и W_n .

Основным результатом процесса моделирования является искусственный каталог землетрясений. Принадлежащие одному разлому ячейки, в которых произошло землетрясение в момент времени t_i , объединяются в одно событие. Географические координаты его эпицентра и глубина вычисляются как взвешенные суммы координат и глубин ячеек (вес ячейки определяется как отношение ее площади к сумме площадей всех ячеек, вовлеченных в землетрясение). Взвешенная сумма векторов $(\gamma_i^e f_i, \gamma_l^e f_l)$ добавок к неупругим смещениям δ_i и δ_l при пересчете по формулам (6) аппроксимирует случившуюся подвижку блоков вдоль разлома и позволяет определить механизм модельного события. Механизм землетрясения — важная его характеристика, информирующая о процессе распространения различных сейсмических волн от очага. В зависимости от направления подвижки и угла наклона разлома принято выделять следующие основные механизмы: сдвиг, сброс и взброс; в новой версии модели магнитуда землетрясения вычисляется в зависимости от его механизма с использованием известных в сейсмологии эмпирических формул [6]

$$M = D \lg S + E, \quad (7)$$

где S — сумма площадей ячеек (в км²); $D = 1,02$; $E = 3,98$ для сдвига; $D = 1,02$; $E = 3,93$ для сброса; $D = 0,90$; $E = 4,33$ для взброса.

Отметим, что модель дополнительно позволяет получить картину мгновенной кинематики блоков и информацию о характере их взаимодействия вдоль границ.

Результаты вычислительных экспериментов

Сферическая блоковая модель активно применяется к исследованию динамики и сейсмичности глобальной системы крупнейших тектонических плит, покрывающих всю поверхность Земли [3–5]. Геометрия рассматриваемой структуры полагается неизменной: 15 плит (Наска, Южноамериканская, Кокос, Карибская, Североамериканская, Тихоокеанская, Африканская, Антарктическая, Евразийская, Аравийская, Индийская, Сомалийская, Филиппинская, Австралийская и Хуан де Фука), 186 вершин и 199 разломов. Граничные блоки отсутствуют, движение подстилающей

среды определяется как вращение на сфере согласно модели HS3-NUVEL1 [7]. Числовые значения параметров элементов блоковой структуры варьируют с целью достижения наилучшего соответствия результатов моделирования и реальных сейсмических данных. В качестве основных характеристик, определяющих качество моделирования, рассматриваются пространственное распределение сильных событий и закон повторяемости Гуттенберга — Рихтера.

Приведем некоторые результаты новых вычислительных экспериментов. Сравнительный анализ пространственных распределений эпицентров сильных землетрясений для реального каталога [8], включающего события за период с 01.01.1900 по 31.12.2013 без ограничений по глубине и местоположению, и для «лучшего» из модельных обнаружил ряд общих черт (рис. 1). Отметим, в частности, наличие двух основных сейсмических поясов, Тихоокеанского и Средиземноморско-Трансазиатского, где происходит большая часть сильных событий, увеличение сейсмической активности вблизи точек, где сходятся три и более плит, и очевидное сходство в расположении эпицентров сильнейших землетрясений.

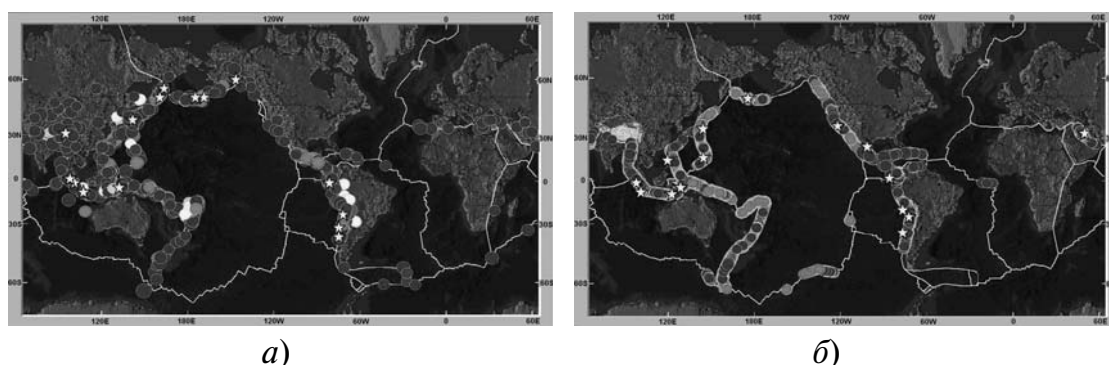


Рис. 1. Эпицентры сильных землетрясений с магнитудой не менее 7,0
а — зарегистрированная сейсмичность (каталог NEIC, период 01.01.1900—31.12.2013); *б* — модельная сейсмичность (100 единиц безразмерного времени); звездочками отмечены 15 сильнейших событий

Учет механизмов землетрясений в модели (см. формулу (7)) позволил получить близость углов наклона графиков повторяемости для реального и модельного каталогов на достаточно большом магнитудном интервале (рис. 2), чего не удавалось на предыдущем этапе [4, 5]. Этот факт свидетельствует об идентичности распределений землетрясений по магнитуде в данном интервале и, следовательно, о возможности изучения некоторых реальных закономерностей по модельному каталогу. В то же время сравнение механизмов конкретных событий выявило как определенное сходство (так, например, механизм практически всех реальных и модель-

ных событий на разломах с углом наклона 90° является сдвигом), так и существенные различия в зонах субдукции, что стимулирует изучение влияния параметров модели на тип механизма события.

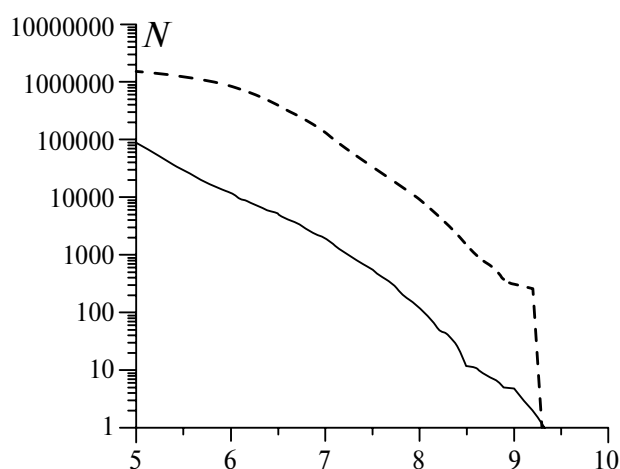


Рис. 2. Графики повторяемости, построенные по реальному (NEIC, события с магнитудой не менее 5,0; период 01.01.1900–31.12.2013, сплошная линия) и модельному (события с магнитудой не менее 5,0; 100 единиц безразмерного времени, штриховая линия) каталогам; N – аккумулярованное число землетрясений, M – магнитуда

Эффективность применения параллельных технологий

Вычислительные эксперименты показали, что сферическая блоковая модель является достаточно ресурсоемкой при расчетах на последовательных машинах, однако допускает эффективное распараллеливание алгоритмической части. Для этого используется стандартная схема «мастер-рабочий» [5] с единым загрузочным модулем, почти равномерным распределением вычислительной нагрузки по всем процессорам и отсутствием обменов между рабочими процессорами. Подробное описание параллельного алгоритма и его характеристик приведено в [5], здесь ограничимся кратким анализом эффективности последней модификации.

Для эксперимента был выбран наиболее «времяемкий» вариант из просчитанных (с большим числом модельных землетрясений) и рассмотрена единица безразмерного времени. Моделирование проводилось на введенном в 2013-м году в эксплуатацию в Институте математики и механики УрО РАН гибридном вычислителе кластерного типа «Уран» (состоит из 1864 CPU (Intel Xeon) и 352 GPU (NVIDIA Tesla), имеет 6976 Гб оперативной памяти и пиковую производительность порядка 215 Тфлопс).

Результаты тестирования представлены в таблице. Здесь T_p – время выполнения программы на многопроцессорной машине для p процессоров, T_1 – время работы последовательного алгоритма, $S_p = T_1/T_p$ и $E_p = S_p/p$ – полученные ускорение и эффективность, характеризующие качество распараллеливания задачи. Для «идеального» параллельного алгоритма ускорение равно числу процессоров; в этом случае имеем единичную эффективность.

Время счета, с, ускорение и эффективность
для разного числа процессоров

p	T_p , с	S_p	E_p
1	1934,22	—	—
2	997,63	1,94	0,97
4	520,20	3,72	0,93
8	255,50	7,57	0,95
16	126,08	15,34	0,96
32	64,13	30,16	0,94
64	32,95	58,70	0,92
96	21,60	89,55	0,93
128	18,08	106,98	0,84

Из таблицы следует, что эффективность распараллеливания достаточно высока, причем с ростом числа задействованных процессоров она не падает ниже разумного уровня. Для «больших» расчетов использовалось 96 процессоров, при этом модельный вариант до 100 единиц безразмерного времени выполнялся около 35 мин вместо 50 ч при вычислениях на одном процессоре.

Работа выполнена в рамках программы президиума РАН № 15 «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1–1023).

Литература

1. Gabrielov A. M., Newman W. I. Seismicity Modeling and Earthquake Prediction : a Review // Geophysical Monograph 83, IUGG. 1994. Vol. 18. P. 7–13.
2. Keilis-Borok V.I., Soloviev A.A. (Eds.) Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction. Springer, 2003. 337 p.

3. Rozenberg V. L., Sobolev P. O., Soloviev A. A., and Melnikova L. A. The Spherical Block Model: Dynamics of the Global System of Tectonic Plates and Seismicity // Pure Appl. Geophys. 2005. № 162. P. 145–164.
4. Мельникова Л. А., Розенберг В. Л. Сферическая блоковая модель динамики и сейсмичности литосферы: различные модификации и вычислительные эксперименты // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 3. С. 95–120.
5. Мельникова Л. А., Розенберг В. Л. Высокопроизводительные вычисления в моделировании динамики и сейсмичности систем тектонических плит // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2012) : Тр. междунар. конф. Новосибирск, 2012. С. 248–259. ISBN 978-5-696-04237-4.
6. Wells D. L., Coppersmith K. L. New Empirical Relationships among Magnitude, Rupture Length, Rupture Width, Rupture Area, and Surface Displacement // Bull. Seism. Soc. of America. 1994. Vol. 84, No. 4. P. 974–1002.
7. Gripp A. E., Gordon R. G. Young Tracks of Hotspots and Current Plate Velocities // Geophys. J. Int. 2002. Vol. 150. P. 321–361.
8. Global Hypocenters Data Base, NEIC/USGS. Denver, CO. URL: <http://earthquake.usgs.gov/regional/neic/> (дата обращения: 1.03.2014).

Е. А. Бахарева, канд. техн. наук, научн. сотрудник

Института машиноведения УрО РАН,

В. В. Стружанов, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Уральский государственный университет путей сообщения, гл. научн. сотрудник Института машиноведения УрО РАН

Расчет напряжений в круглых стержнях из частично пластического разупрочняющегося материала при кручении

Тенденции современного машиностроения, энергетики, аэрокосмического комплекса характеризуются тем, что ответственные технические системы работают в экстремальных условиях, и материал элементов конструкций зачастую эксплуатируется с исчерпанием всех запасов по прочности, включая состояние, соответствующее так называемому закритическому деформированию.

Состояние предразрушения материала или стадия закритического деформирования сопровождаются значительным повреждением материала микродефектами (микропорами и микротрещинами) в процессе деформирования. С феноменологической точки зрения стадия предразрушения материала характеризуется падающей ветвью полной диаграммы деформирования, для которой характерно падение напряжений при прогрессирующих деформациях [1, 2].

Введение

В данной работе рассматривается стержень с круглым поперечным сечением, изготовленный из разупрочняющегося материала. Деформирование стержня осуществляется при постоянной температуре посредством приложения к торцам закручивающего момента (мягкое нагружение) или фиксации угла закручивания стержня (жесткое нагружение). Выписываются уравнения статического равновесия, связывающие параметр состояния системы (угол закручивания) с параметром управления (крутящий момент). Предложена методика расчета напряженно-деформированного состояния стержня, которая базируется на методе упругих решений, предложенном профессором А.А. Ильюшиным, и вплоть до настоящего времени применяется для решения упругопластических задач [3, 4]. Алгоритм продемонстрирован на примере расчета напряжений, возникающих в стержне с заданными размерами и свойствами материала.

1. Постановка задачи и определяющие соотношения

Рассматривается стержень длины L с круглым поперечным сечением радиуса R (рис. 1), постоянным по длине. Деформирование осуществляется квазистатически при постоянной температуре, задавая либо монотонно возрастающий крутящий момент M (мягкое нагружение), либо монотонно увеличивая угол закручивания стержня φ (жесткое нагружение).

В случае кручения стержня единственной ненулевой компонентой тензора напряжений является касательное напряжение τ , а деформации сдвига линейно распределены по радиусу сечения $\gamma = \varphi r / L$ [5].

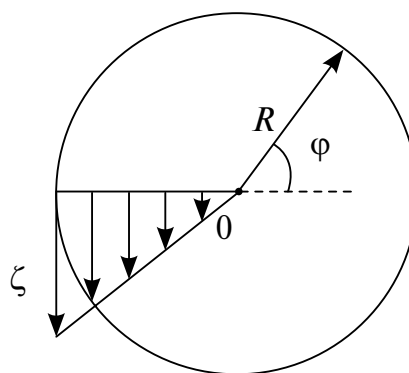


Рис. 1. Распределение сдвиговых деформаций по радиусу сечения стержня (ζ — максимальная деформация сдвига)

Свойства материала определяет зависимость между напряжениями и деформациями $\tau(\gamma)$ в координатах «касательные напряжения τ — сдвиговые деформации γ », обладающая восходящей (упрочнение) и падающей до нуля (разупрочнение) ветвями (рис. 2). Последняя характеризует закритическую стадию деформирования материала. Символами γ^B и γ^Z обозначены сдвиговая деформация предела прочности и сдвиговая деформация, приводящая к полному разрушению образца трещинами, γ^e и γ^p — упругая и пластическая составляющие полной сдвиговой деформации γ , G — модуль Юнга для сдвига.

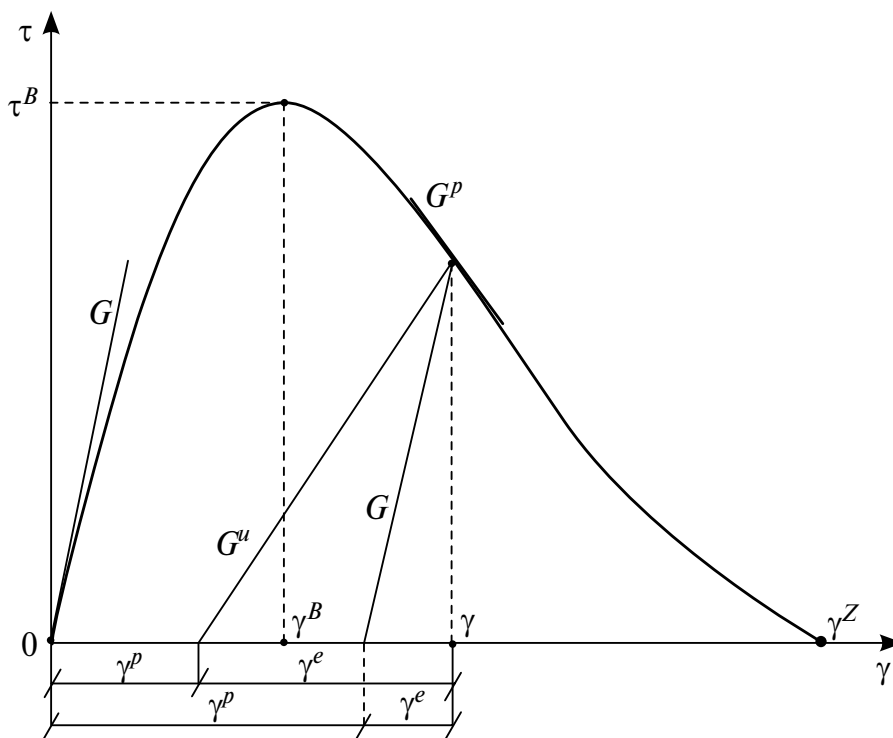


Рис. 2. Полная диаграмма деформирования

Важной характеристикой материала является инкрементальный модуль сдвига $G^p = d\tau/d\gamma$ (модуль тангенциальной жесткости при кручении). На стадии упругости $G^p = G$. Когда $G^p \geq 0$, то материал находится на стадии упрочнения (рост сдвиговой деформации сопровождается возрастанием сопротивления материала), при $G^p < 0$ — в состоянии разупрочнения (собственная неустойчивость материала, когда рост деформации сопровождается падением сопротивления).

Отклонение диаграммы деформирования от прямолинейного участка объясняется диссипативными процессами, происходящими в материале при деформировании. Обычно различают

механическую диссипацию, осуществляемую пластической деформацией, и континуальное разрушение, характеризуемое поврежденностью, вызванной нарушением сплошности [1, 6]. Материал, в котором протекают оба типа диссипации, принято называть партипластическим (частично пластическим) материалом. Модуль раз-

грузки равен упругому модулю $G^u = \frac{\tau(\gamma)}{\gamma^e} = \tau \frac{(\gamma)}{(\gamma - \gamma^p)}$ (рис. 2). Свой-

ства партипластического материала определяет соотношение

$$\tau = G^u(\gamma - \gamma^p). \quad (1)$$

Уравнения пластической составляющей полной деформации сдвига имеет вид [1]

$$\gamma^p = \gamma - \frac{\tau}{G^u} = \gamma - \int_0^\gamma \frac{G^p}{G^u} d\gamma. \quad (2)$$

К партипластическим материалам относят низкоуглеродистые стали, горные и соляные породы, графиты и др.

При любом распределении напряжений и деформаций по радиусу стержня, связанном с диаграммой $\tau(\gamma)$, где $\gamma = \varphi r/L$, тождественно удовлетворяются дифференциальные уравнения равновесия и условия совместности деформаций. Граничные условия на концах стержня заданы в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . В случае мягкого нагружения они имеют вид

$$u|_{z=0} = 0, \quad 2\pi \int_0^R \tau \cdot r^2 dr = M, \quad (3)$$

а в случае жесткого нагружения —

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=L} = \varphi r (0 \leq r \leq R), \quad (4)$$

где u — перемещение в тангенсальном направлении [5].

Рассмотрим уравнения (3). Здесь первое равенство выполняется тождественно в силу нечетности функции $\tau(r)$, а второе уравнение здесь можно представить в виде операторного уравнения

$$\Lambda(\varphi, M) = 0 \quad (5)$$

относительно переменной состояния (угла закручивания φ стержня) и параметра управления M с нелинейным оператором

$$\Lambda(\varphi, M) = \lambda(\varphi) - M = 2\pi \int_0^R \tau \left(\frac{\varphi r}{L} \right) r^2 dr - M,$$

заданным на множестве $\left\{ \varphi, M : 0 \leq \varphi \leq \varphi^Z = \frac{\gamma^Z L}{R}, M \geq 0 \right\}$. Перепишем уравнение (5), используя соотношение (1) для напряжений, в виде

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr &= 2\pi \int_0^R G^u (\gamma - \gamma^p) r^2 dr = \\ &= 2\pi \frac{\varphi}{L} \int_0^R G^u r^3 dr - 2\pi \int_0^R G^u \gamma^p r^2 dr = \varphi \frac{J^u}{L} - M^\Phi = M. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $J^u = 2\pi \int_0^R G^u r^3 dr$ имеет смысл, аналогичный жесткости упругого неоднородного стержня при кручении, состояние кото-

рого характеризуется модулями $G^u(\gamma)$, где $\gamma = \frac{\varphi r}{L}$ — деформации сдвига, с учетом диаграммы деформирования.

$$M^\Phi = 2\pi \int_0^R G^u \gamma^p r^2 dr = 2\pi \int_0^R G^u \left(\frac{\varphi r}{L} - \frac{1}{G^u} \int_0^{\varphi r/L} G^p(e) de \right) r^2 dr$$

— фиктивный скручивающий момент, определяемый псевдонапряжениями $G^p \gamma^p$, где пластические сдвиговые деформации рассчитываются по закону (2).

2. Алгоритм расчета напряжений при мягком нагружении

В случае мягкого нагружения (к стержню прикладывается закручивающий момент M) решение исходной краевой задачи (5) можно представить в виде суммы решений основной задачи (задача A) и корректирующей задачи (задача B). Задача (A) — это задача об определении напряжений и деформаций, возникающих в упругом стержне с модулями $G^u = G^u(\varphi r/L)$. Ее решение дает выражения

$$\varphi' = \frac{M L}{J^u}, \quad \gamma' = \frac{\varphi' r}{L}, \quad \tau' = G^u \left(\frac{\varphi r}{L} \right) \gamma'. \quad (7)$$

Задача (B) формулируется следующим образом. Мысленно разгрузим стержень. После разгрузки в нем остаются только пластические деформации, которые инициируют появление так называемых остаточных напряжений, которые самоуравновешиваются при отсутствии внешней нагрузки. В этом случае напряженно-деформированное состояние определяют равенства

$$\varphi'' = \frac{M^\Phi L}{J^u}, \quad h' = \frac{\varphi'' r}{L}, \quad \tau'' = G'' \left(\frac{\varphi r}{L} \right) (h' - \gamma^p), \quad (8)$$

где φ'' — угол закручивания стержня, появляющийся из-за наличия в нем остаточных напряжений; h' — линейно распределенная деформация, отвечающая данному углу закручивания и фиксируемая сторонним наблюдателем (внешним по отношению к стержню).

Итерационный процесс расчета напряженно-деформированного состояния заключается в следующем. Пусть при некотором крутящем моменте M_0 стержень имеет угол закручивания φ_0 и находится в равновесии, параметры которого равны $G'' = G_0''(\gamma_0)$, $\tau = \tau_0(\gamma_0)$, $\gamma = \gamma_0 = \varphi_0 r / L$, $\gamma^p = \gamma_0^p(\gamma_0)$. Возмутим это равновесие, увеличив момент на величину M_Δ . Параметры возмущения найдем, используя решение задачи (A) по формулам (7). Имеем

$$\varphi_\Delta'' = \frac{M_\Delta L}{J_0''}, \quad \gamma_\Delta' = \frac{\varphi_\Delta' r}{L}, \quad \tau_\Delta' = G_0'' \gamma_\Delta'.$$

Здесь $J_0'' = J''(\varphi_0)$. Тогда параметры стержня в возмущенном состоянии равны

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_\Delta' = \frac{ML}{J_0''}, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_\Delta' = \frac{\varphi_1 r}{L}, \quad \tau_1 = \tau_0 + \tau_\Delta',$$

где $M = M_0 + M_\Delta$.

Данные величины соответствуют равновесному состоянию при неизменившихся значениях G_0'' и γ_0^p . Однако величины модулей и пластических деформаций должны поменяться и отвечать деформации γ_1 в соответствии с полной диаграммой деформирования. Поэтому модули станут равными $G_1'' = G''(\gamma_1)$, а пластические деформации достигнут величины γ_1^p , определяемой по формуле (2), в которой полагаем $G'' = G_1''$, $\gamma = \gamma_1$.

Таким образом, найденное равновесие нарушается, и стержень под действием момента M должен перейти в другое равновесное

состояние, параметры которого являются суммой решений задач (А) и (В) для стержня с модулями G_1^u и пластическими деформациями γ_1^p .

Используя формулы (7) и (8), находим

$$\varphi_1' = \frac{ML}{J_1^u}, \gamma_1' = \frac{\varphi_1' r}{L}, \tau_1' = G_1^u \gamma_1',$$

$$\varphi_1'' = \frac{M_1^\Phi L}{J_1^u}, h_1' = \frac{\varphi_1'' r}{L}, \tau_1'' = G_1^u (h_1' - \gamma_1^p).$$

Здесь $J_1^u = J^u(\varphi_1)$ — новая жесткость стержня с модулями упругости $G_1^u \left(\frac{\varphi_1 r}{L} \right)$; $M_1^\Phi = M^\Phi(\varphi_1)$ — новое значение фиктивного закручивающего момента. Скорректированное напряженно-деформированное состояние определяется суммой задач (А) и (В), а именно:

$$\varphi_2 = \varphi_{11}' + \varphi_1'', \gamma_2 = \gamma_1' + \gamma_1'' = \frac{\varphi_2 r}{L}, \tau_2 = \tau_1' + \tau_1''. \quad (9)$$

Выражения (9) будем считать первым приближением к параметрам исходного равновесного состояния и проведем следующую корректировку. Находим $G_2^u = G^u(\gamma_2)$ и по формуле (2), где уже $\gamma = \gamma_2$ и $G^u = G_2^u$, вычисляем новые значения пластических деформаций $\gamma_2^p(y)$. Для параметров G_2^u и γ_2^p ищем решения задач (А) и (В) и, складывая их, получаем второе приближение.

Процесс повторяем необходимое число раз. На n -м шаге итерационного процесса получаем равенство

$$\varphi_{n+1} = L \frac{M + M_n^\Phi}{J_n^u} = \lambda(\varphi_n),$$

где величины $J_n^u = J^u(\varphi_n)$, $M_n^\Phi = M^\Phi(\varphi_n)$ подсчитаны для функций $\gamma_n = \frac{\varphi_n r}{L}$, $G_n^u = G^u \left(\frac{\varphi_n r}{L} \right)$, $\gamma_n^p = \gamma^p \frac{\varphi_n r}{L}$.

3. Алгоритм расчета напряжений при жестком нагружении

При жестком нагружении, когда стержню задется внешний угол закручивания φ , напряженно-деформированное состояние можно

представить суммой решений двух задач (C) и (D). Задача (C) — это задача нахождения напряжений и деформаций в упругом стержне с модулями G^u при заданной кривизне и нулевых остаточных деформациях. Ее решение дают выражения

$$\gamma = \frac{\varphi r}{L}, \quad \tau' = G^u \gamma, \quad M' = \frac{J'' \varphi}{L}, \quad (10)$$

где M' — крутящий момент, отвечающий заданному углу закручивания стержня φ при кручении упругого стержня.

Задача (D) — это задача об определении напряжений при известных остаточных деформациях и нулевом φ . Ее решение можно получить, наложив на решение задачи (B) решение задачи об изгибе упругого стержня с моментом обратного знака ($-M^\Phi$) таким, чтобы суммарная кривизна балки была равна нулю. В результате имеем

$$\varphi = 0, \quad h = 0, \quad \tau'' = -G^u \gamma^p, \quad M'' = -M^\Phi. \quad (11)$$

Пусть теперь при углу φ_0 , которой отвечает момент M_0 , стержень находится в равновесии. Возмутим это равновесие, увеличив угол на величину φ_Δ . Параметры возмущения найдем, используя формулы (13). Имеем

$$\gamma_\Delta = \frac{\varphi_\Delta r}{L}, \quad \tau'_\Delta = G_0^u \gamma_\Delta, \quad M'_\Delta = \frac{J_0'' \varphi_\Delta}{L}.$$

Тогда параметры стержня в возмущенном состоянии равны $\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_\Delta$, $\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_\Delta$, $\tau_1 = \tau_0 + \tau'_\Delta$, $M = M_0 + M'_\Delta$. Далее, используя диаграмму деформирования, находим для значений $\gamma_1 \left(\frac{\varphi r}{L} \right)$ распределение модулей $G_1^u \left(\frac{\varphi r}{L} \right)$ и по формуле (2) распределение пластических деформаций $\gamma_1^p \left(\frac{\varphi r}{L} \right)$. Затем, применяя формулы (10) и (11), получаем решения задач (C) и (D):

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_1 r}{L}, \quad \tau'_1 = G_1^u \gamma_1, \quad M'_1 = \frac{J_1'' \varphi_1}{L},$$

$$\varphi = 0, \quad h = 0, \quad \tau_1'' = -G_1^u \gamma_1^p, \quad M_1'' = -M_1^\Phi.$$

Скорректированное напряженно-деформированное состояние есть сумма решений задач (C) и (D), то есть

$$\gamma_2 = \gamma_1 = \frac{\varphi_1 R}{L}, \quad \tau_2 = \tau'_1 + \tau''_1, \quad M_2 = M'_1 + M''_1. \quad (12)$$

Так как деформации не изменились, то не меняются модули G'' и пластические деформации γ_1^p . Следовательно, решение (12) окончательное.

4. Пример расчета напряжений в стержне при кручении

В качестве примера рассчитаем параметры равновесных состояний (M , φ) при кручении стержня длиной $L = 100$ мм с радиусом $R = 10$ мм. Полная диаграмма в координатах «касательные напряжения — сдвиги» задана функцией $\tau = 2G(-\gamma^2 + 2\gamma^B\gamma)$, где $G = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\gamma^B = 0,045$ (рис. 3). Считаем, что материал разрушен, если $\gamma \geq \gamma^Z = 0,09$.

По разработанным методам были написаны программа расчета параметров напряженно деформированного состояния в среде Microsoft Visual Studio 2010 на языке программирования C++. Вычисленные параметры стержня (угол закручивания φ и крутящий момент M) представлены на рис. 4. На диаграмме точка 1 имеет координаты $\varphi^m = 0,5625$ рад, $M = 15,9 \cdot 10^3$ кН·м, и точка 2, отвечающая деформации разрушения γ^Z , имеет координаты $\varphi^Z = 0,9$ рад, $M^Z = 10,1 \cdot 10^3$ кН·м.

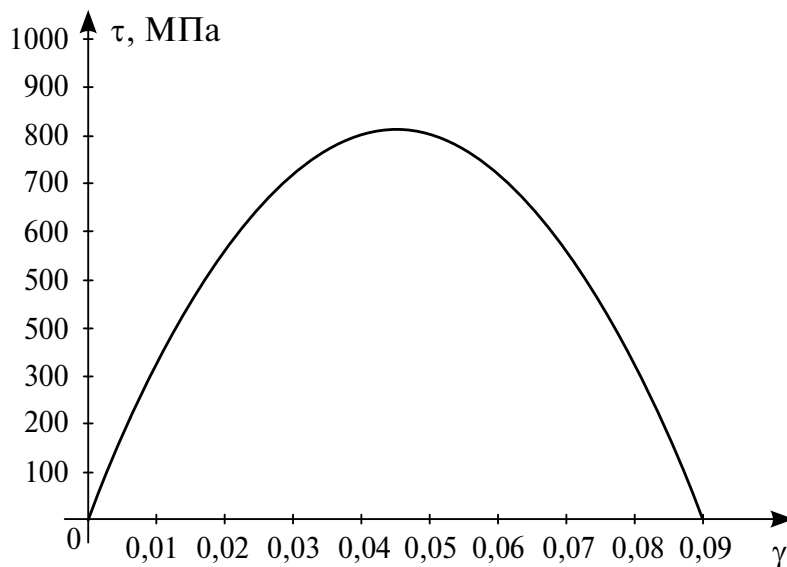


Рис. 3. Диаграмма деформирования, заданная в виде $\tau = 2G(-\gamma^2 + 2\gamma^B\gamma)$

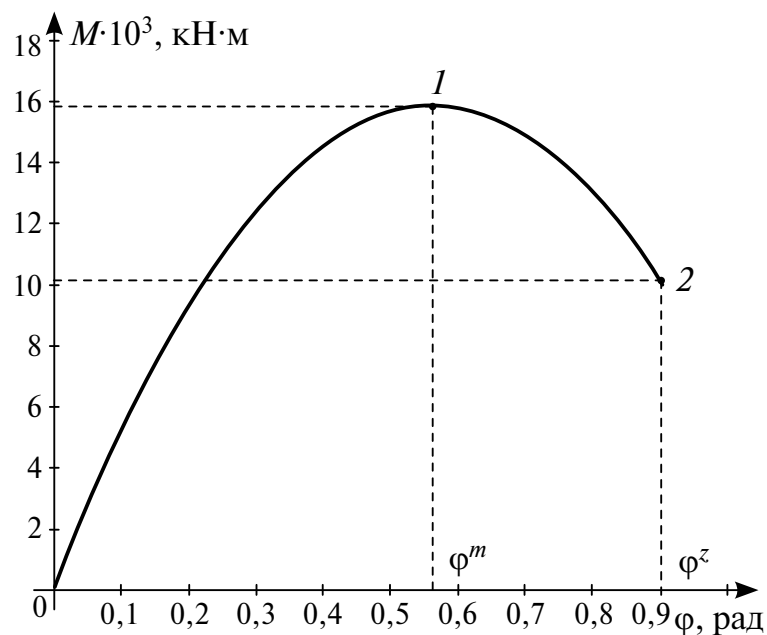


Рис. 4. Диаграмма $M(\varphi)$,
отвечающая полной диаграмме $\tau(\gamma)$

Отметим, что при мягком нагружении, используя метод, приведенный в разд. 2, можно построить только восходящую ветвь диаграммы $M(\varphi)$. После достижения точки 1 алгоритм расходится. Для жесткого режима нагружения метод алгоритм (разд. 3) позволяет построить как восходящий, так и падающий участок зависимости $M(\varphi)$.

На рис. 5 показано распределение напряжений по радиусу стержня для точки 1 диаграммы $M \sim \varphi$ (рис. 4), рассчитанных с применением итерационной схемы для мягкого нагружения.

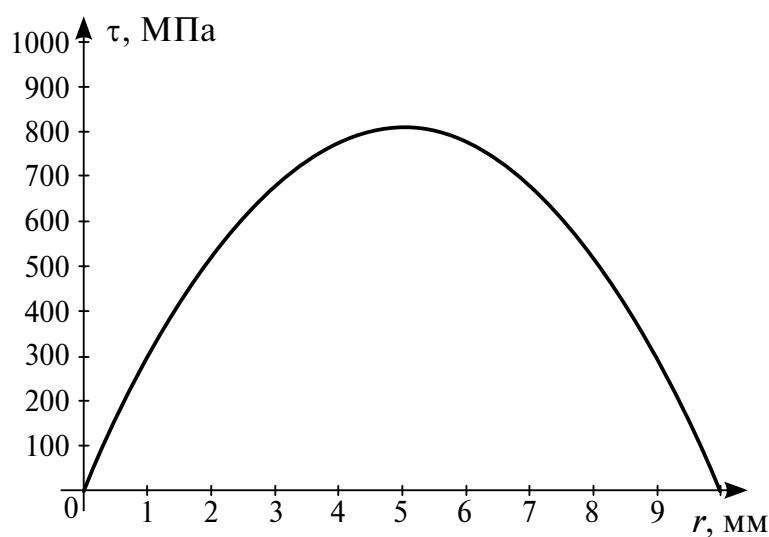


Рис. 5. Распределение напряжений,
отвечающее наивысшей точке диаграммы $M(\varphi)$

На рис. 6 показано распределение напряжений в конечной точке диаграммы $M \sim \varphi$ (точка 2, рис. 4), рассчитанное по итерационной схеме для жесткого нагружения.

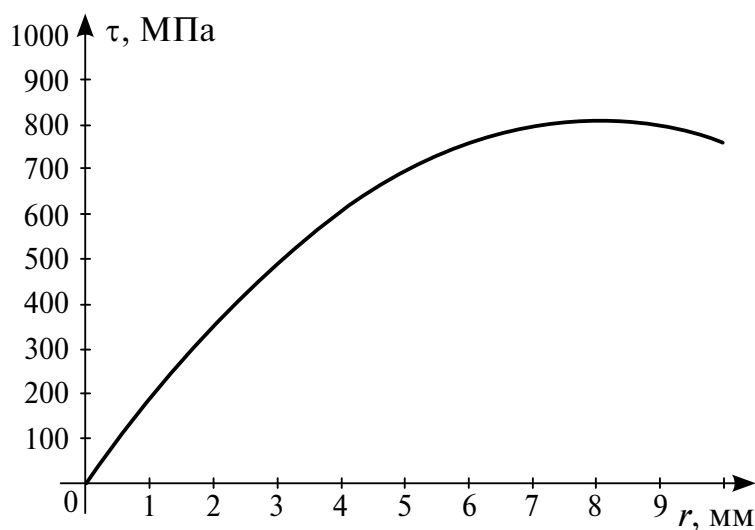


Рис. 6. Распределение напряжений, отвечающее наивысшей точке диаграммы $M(\varphi)$

Установлено качественное совпадение результатов исследований по кручению круглого стержня и ранее полученных алгоритмов для чистого изгиба балок [7, 8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-08-00186).

Литература

1. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материалов в элементах конструкций. Екатеринбург : УрО РАН, 1995. 190 с.
2. Волкова Т. А., Волков С. С. Кинетическая поврежденность микроструктуры материалов в элементах конструкций // Транспорт Урала. 2012. № 4 (35). С. 21–25. ISSN 1815-9400.
3. Ильюшин А. А. Пластичность, Ч. 1 : Упруго-пластические деформации / научн. предисловие Е. И. Шемякина, И. А. Кийко, Р. А. Васина / репр. воспр. текста изд. 1948 г. / М. : Логос, 2004. 388 с. ISBN 5-94010-377-4.
4. Победря Б. Е. О методах упругих решений // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 59–72.
5. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. М. : Мир, 1967. 670 с.
6. Стружанов В. В. Ассоциированный и инкрементальный законы пластического течения для сред, проявляющих деформационное

разупрочнение // Известия Уральского государственного университета. 1998. № 10. С. 92–101.

7. Стружанов В. В., Бахарева Е. А. Итерационные процедуры расчета параметров равновесия и устойчивость чистого изгиба балок из пластичных и хрупких разупрочняющихся материалов // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. 2010. № 1 (20). С. 84–95. ISSN 1991-8615.
8. Стружанов В. В., Бахарева Е. А. К расчету предельных нагрузок балочных элементов при чистом изгибе // Транспорт Урала. 2013. № 3. С. 24–27. ISSN 1815-9400.

Е. Г. Филиппова, С. С. Титов, д-р физ.-мат. наук,
Уральский государственный университет путей сообщения

Задача о радиусе покрытия кода Рида – Маллера первого порядка

Нелинейность ($N(f)$) — один из важнейших параметров криптографических функций, численно выражающий расстояние (в метрике Хэмминга) от данной функции до множества аффинных функций. С точки зрения теории кодирования, максимум значения $N_k(f)$ равен радиусу покрытия для кодов Рида – Маллера $RM(m, k)$ [2].

Если m четно, то $N_{\max}(m) = 2^{m-1} - 2^{\frac{m-1}{2}}$. Результаты оценок значений $N_{\max}(m)$ для нечетных m получены в теории кодирования (таблица).

Оценки значений $N_{\max}(m)$ при нечетных m

m	Оценка значения $N_{\max}(m)$
3, 5, 7	$N_{\max}(m) = 2^{m-1} - 2^{\frac{m-1}{2}}$
9, 11, 13	$2^{m-1} - 2^{\frac{m-1}{2}} \leq N_{\max}(m) \leq 2^{m-1} - 2^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}$
Нечетное ≥ 15	$2^{m-1} - 2^{\frac{m-1}{2}} < N_{\max}(m) \leq 2^{m-1} - 2^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}$

К сожалению, в настоящее время величина радиуса покрытия кода Рида — Маллера для произвольного m не известна.

Код $RM(m, 1)$, состоящий из векторов длины 2^m над конечным полем $GF(2)$, соответствующих значениям истинности линейных (аффинных) функций $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 \oplus f_1 x_1 \oplus \dots \oplus f_m x_m$ от m булевых переменных x_1, \dots, x_m , определяет однородный матроид M мощности 2^m [1], циклы G_f которого имеют мощность $n = 2^{m-1}$ и задаются характеристическими функциями $f \neq \text{const}$ так, что семейство C его циклов есть

$$C = C_f : \{C_f = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_m), x_i \in GF(2), \\ (i = 1, \dots, m), f(x_1, \dots, x_m) = 1\}, f \neq \text{const}\}.$$

Для любого подмножества $X \subset M$ расстояние r_X его характеристической функции до кода Рида — Маллера равно

$$r_X = \min \left\{ |X|, 2^m - |X|, \min_{C \in C} |X \oplus C| \right\}.$$

Радиус покрытия r_X кода $RM(m, 1)$ равен $r_m = \max_{X \subset M} r_X$. Макси-

мально удаленному от кода множеству X соответствует максимально нелинейная характеристическая функция — булева функция с максимально возможным расстоянием Хэмминга от данной функции до множества всех аффинных функций. Необходимо рассмотреть два случая — зависимого и независимого множества X .

1. Пусть X — зависимое множество мощности $|X| = x$. Тогда X содержит цикл; если $C \in C$ и $C \subset X$, то расстояние до кода Рида — Маллера равно

$$r_X = \min \left\{ |X|, 2^m - |X|, |X| - n \right\} = \min \left\{ x, 2^m - x, x - 2^{m-1} \right\}$$

и зависит только от x и принимает максимальное значение при $x = 3 \cdot 2^{m-2} = 2^{m-1} + 2^{m-2}$, равное 2^{m-2} .

Рассмотрим, например, код $RM(3, 1)$, состоящий из векторов длины 8 над конечным полем $GF(2)$; учтем, что X содержит цикл, тогда:

при $|X| = 4$, $r_X = \min\{4, 8 - 4, 4 - 4\} = 0$;

при $|X| = 5$, $r_X = \min\{5, 8 - 5, 5 - 4\} = 1$;

при $|X| = 6$, $r_X = \min\{6, 8 - 6, 6 - 4\} = 2$;

при $|X| = 7$, $r_X = \min\{7, 8 - 7, 7 - 4\} = 1$;
 при $|X| = 8$, $r_X = \min\{8, 8 - 8, 8 - 4\} = 0$;
 и $r_3 = \max\{0, 1, 2, 1, 0\} = 2 = 2^{3-2}$.

2. Если же X — независимое множество мощности $|X| = x$, то в нем нет циклов.

Пусть $y = \min_{C \in \mathcal{C}} |C \setminus X|$, ясно, что $y \geq 1$, при этом выполняется равенство $\min_{C \in \mathcal{C}} |X \oplus C| = y + [x - (n - y)]x + 2y - n$.

При $y = 1$ имеем $\min_{C \in \mathcal{C}} |X \oplus C| = x + 2 - n$, где $x = |X|$, и для любого независимого множества X' такого, что $X \subset X'$, имеем $y' = \min_{C \in \mathcal{C}} |C \setminus X'| = 1$.

Максимальное такое множество — любая база B матроида M мощности $x = \text{rank}$. Поскольку ранг двойственного матроида равен $(m + 1)$, имеем $\text{rank} = |M| - (m + 1) = 2^m - (m + 1)$, и расстояние от любой базы до кода Риды — Маллера равно

$$r_B = \min \left\{ \underbrace{2^m - (m + 1)}_{\text{Расстояние от } X \text{ до всех нулей}}, \underbrace{(m + 1)}_{\text{Расстояние от } X \text{ до всех единиц}}, \underbrace{2^m - (m + 1) + 2 - 2^{m-1}}_{\text{Расстояние от } X \text{ до всех циклов}} \right\}.$$

Если $m = 3$, то $|B| = 2^3 - (3 + 1) = 4$

и $r_B = \min\{2^3 - 4, 4, 2^3 - 4 + 2 - 4\} = 2$.

Если $m = 4$, то $|B| = 2^4 - (4 + 1) = 11$

и $r_B = \min\{2^4 - 5, 5, 2^4 - 5 + 2 - 2^{4-1}\} = \min\{11, 5, 5\} = 5$.

Очевидно, что это не есть минимальное расстояние. Надо отслеживать постепенное удаление элементов из независимых множеств. Удаляем один элемент из базы, например, рассмотрим $X = B \setminus \{d\}$, $X \subset X' = B$, $d \in C_1$. Тогда расстояние до всех циклов, не содержащих удаленный элемент, вычисляется как

$$\begin{aligned} \text{dist}(X, C_1) &= |X \oplus C_1| = |(X \cup C_1) \setminus (X \cap C_1)| = \\ &= |(B \setminus \{d\}) \oplus C_1| = |(B \setminus \{d\}) \cup C_1 \setminus (B \setminus \{d\}) \cap C_1| = \\ &= |[(B \cup C_1) \setminus (B \cap C_1)] \setminus \{d\}| = |B \oplus C_1| - 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, код $RM(1,4)$, который определяет однородный матроид M мощности 2^4 . Выберем одну из баз матроида B , $|B| = 2^4 - (4 + 1) = 11$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
B	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0

B — действительно база матроида, так как при замене элементов, стоящих на местах 7, B , D , E , F , на противоположные, получим соответственно циклы C_9 , C_5 , C_3 , C_2 и C_{32} , принадлежащие M .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
C_2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
C_3	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
C_5	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
C_9	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C_{32}	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1

В качестве удаляемого элемента d произвольно возьмем единицу, расположенную на месте C , получим $X = B \setminus \{d\}$. Вычислим расстояние от множества X до циклов:

$$\begin{aligned} |X \oplus C_9| &= 4, & |X \oplus C_5| &= 4, & |X \oplus C_3| &= 6, \\ |X \oplus C_2| &= 6, & |X \oplus C_{32}| &= 6. \end{aligned}$$

Таким образом, после удаления элемента из базы расстояние до циклов увеличилось на единицу в том случае, если элемент d принадлежал соответствующему циклу, и уменьшилось на единицу в противном случае.

Итак, для увеличения расстояния необходимо удалять такой элемент из базы, который содержится в каждом цикле. В данном примере — это единица, стоящая на месте нуля.

Получен следующий результат: при $m = 4$ для каждой базы есть единственный элемент, при удалении которого получаем максимально удаленную строку от всех циклов, входящих в базу.

Рассмотрим, например, код $RM(1,5)$, который определяет однородный матроид M мощности 2^5 . Выберем одну из баз матроида B , $|B| = 2^5 - (5 + 1) = 26$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W
B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	

Тогда $r_B = \min\{26, 6, 12\} = 6$, а согласно оценке значений $N_{\max}(m)$ при $m = 5, r = 12$. Следовательно, необходимо из базы B удалять элементы, чтобы расстояние до единиц увеличилось, а остановиться, когда расстояние до циклов будет равно расстоянию до всех единиц. После процедуры удаления элементов получим различные множества с вышеописанными требованиями; вот некоторые из них:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W
X	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
X_1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
X_2	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
X_3	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0

Естественно, возникает гипотеза, что продолжение процесса удаления элементов приведет к построению максимально нелинейной функции. Заметим, что этот алгоритм является жадным, т. к. выбирает кратчайшее расстояние. Однако по теореме Радо — Эдмондса [1, 5] обоснованному применению жадного алгоритма соответствует некоторый матроид. Таким образом, либо уменьшая расстояние от базы матроида до нулевой строки, либо увеличивая, мы завершаем процесс на максимально нелинейной функции, следовательно, для обоснования гипотезы о том, что это приведет к максимально нелинейной функции, необходимо построить соответствующий матроид. В частности, максимально нелинейные функции минимального веса должны соответствовать базам искомого матроида, отвечающего требованиям предложенного жадного алгоритма [3].

К сожалению, выдвинутая гипотеза оказалась неверна. Ниже приведено ее опровержение. А именно, если максимально нелинейные функции минимального веса эквивалентны базам некоторого матроида, то должны выполняться [1, 5] аксиомы баз: пусть $M(E)$ — матроид и B_S — семейство его баз, тогда:

$$(B.1) \ B_S \neq \emptyset, \text{ если } B_1, B_2 \in B_S \text{ и } B_1 \neq B_2, \text{ то } B_1 \not\subset B_2 \text{ и } B_2 \not\subset B_1;$$

$$(B.2) \ (B_1, B_2 \in B_S) \wedge \forall b_1 \in B_1, \exists b_2 \in B_2 : (B_1 \setminus b_1) \cup b_2 \in B_S.$$

Аксиома (В.1) очевидно выполнена. Проверим (В.2) для кода $RM(1,4)$. В качестве B_1 и B_2 рассмотрим следующие множества единичных значений бент-функций:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
B_1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
B_2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1

В качестве элемента $b_1 \in B_1$ удалим, например, элемент, стоящий на месте «2», а в качестве элемента $b_2 \in B_2$ поочередно будем добавлять элементы, стоящие на местах «7», «D», «B», «E», «F», получим пять вариантов для B_3 :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$(B_1 \setminus \langle 2 \rangle) \cup \langle 7 \rangle = B_3$	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
$(B_1 \setminus \langle 2 \rangle) \cup \langle D \rangle = B_3$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
$(B_1 \setminus \langle 2 \rangle) \cup \langle B \rangle = B_3$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
$(B_1 \setminus \langle 2 \rangle) \cup \langle E \rangle = B_3$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
$(B_1 \setminus \langle 2 \rangle) \cup \langle F \rangle = B_3$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

В каждом из получившихся случаев расстояние до кода Риды — Маллера меньше 6 и равно 4, следовательно, множество B_3 не бент-функция.

Проверим (В.2) для кода $RM(1,5)$. В качестве B_1 и B_2 рассмотрим следующие множества единичных значений бент-функций:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W
B_1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	
B_2	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	

В качестве элемента $b_1 \in B_1$ удалим, например, элемент, стоящий на месте «1», а в качестве элемента $b_2 \in B_2$ поочередно будем добавлять элементы, стоящие на местах «5», «9», «B», получим три варианта для B_3 :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W
B_3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	
B_4	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	
B_5	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	

В каждом из получившихся случаев расстояние до кода Рида — Маллера меньше 12 и равно 10, следовательно, множества B_3 , B_4 и B_5 не бент-функции (построение кодов Рида — Маллера $RM(1,4)$ и $RM(1,5)$ и вычисление расстояния до кодовых слов выполнялось с помощью электронных таблиц Excel).

Итак, аксиома Штейница не выполнена, максимально нелинейные функции минимального веса не могут быть рассмотрены в качестве баз некоторого матроида.

Возможно, надо проверять аксиомы баз не для всех бент-функций, а для бент-функций из некоторого подкласса.

Литература

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 288 с.
2. Жуков А. Е. Нелинейность булевых функций : пособие по курсу «Криптографические методы защиты информации». М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 40 с.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов. М. : Мир, 1988. 200 с.
4. Логачев О. А., Сальников А. А., Яценко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. М. : МЦНМО, 2004. 470 с.
5. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. СПб : Питер, 2000. 304 с.

Раздел 2.

Математическое и дидактическое моделирование учебного процесса в вузе

О. В. Куликова, канд. пед. наук, *Н. П. Чувев*, канд. физ.-мат. наук,
Уральский государственный университет путей сообщения

Математическое моделирование процесса освоения учебного материала в заданный временной интервал

Математическое моделирование как один из методов научного познания предоставляет возможность исследовать явления и процессы окружающей действительности с помощью преобразований символических выражений, отображающих существенные взаимосвязи. Применение такого метода математического моделирования как установление аналогий между исследуемыми и уже изученными объектами позволяет изучать общесистемные закономерности, присущие сложным структурным образованиям различной природы [8]. Развитие методологии общей теории систем в условиях современного информационного общества привело к использованию математического моделирования в исследованиях разнообразных дидактических систем в педагогике.

Моделью для описания функционирования дидактических систем могут выступать дифференциальные уравнения. В работе [9] представлен пример использования логистического уравнения для моделирования качества образования в вузе. Е. А. Солодова и Ю. П. Антонов на основе анализа результатов исследования математической модели выявили тенденции дальнейшего совершенствования образовательной деятельности. Полнота освоения

учебного материала дисциплины в заданный временной интервал [4] является одной из составляющих качества образования, поэтому представляется целесообразным для исследования его динамики также применить логистическое уравнение.

Дифференциальное уравнение (ДУ), получившее название логистического, было предложено в 1848 году бельгийским математиком П. Ф. Ферхюльстом (1804–1849) [7]. Оно впервые учитывало системный фактор при моделировании ограничения роста численности популяции. В представленной модели популяция рассматривалась как открытая развивающаяся система. Изменение ее численности устремлялось к определенному пределу, который был призван характеризовать емкость ресурсов обитаемой экологической ниши. В данном исследовании аналогом ограничения роста численности популяции может выступать освоение фиксированного количества учебных элементов (УЭ) [2] в рамках программы какой-либо дисциплины. Совокупность УЭ — это система теоретических знаний и практических умений, формируемая в процессе обучения. Математическая модель в этом случае имеет вид

$$\frac{dn(t)}{dt} = kn(t) \left(1 - \frac{n(t)}{N} \right), \quad (1)$$

где $dn(t)/dt$ — скорость освоения УЭ; k — коэффициент пропорциональности; $n(t)$ — количество УЭ, которые освоены студентами в момент времени t ; $(1 - n(t)/N)$ — относительная величина завершенности освоения УЭ в момент времени t ; N — количество УЭ, которые необходимо освоить в рамках дисциплины.

Уравнение (1) представляет собой ДУ с разделяющимися переменными [3] и его частное решение с учетом начального условия $n(0) = n_0$ имеет следующее выражение:

$$n(t) = \frac{Nn_0e^{kt}}{N - n_0 + n_0e^{kt}}, \quad (2)$$

где n_0 — количество УЭ, которые необходимо освоить на предшествующем этапе обучения для понимания материала темы, раздела или дисциплины.

Исследование функциональной зависимости (2) становится возможным при определении значений параметров математической модели (k , n_0 , N). Коэффициенту k можно присвоить, например,

значение единицы, если студент своевременно выполняет в полном объеме все предусмотренные тематическим планом контрольно-обучающие мероприятия. Если объем правильного выполнения запланированных заданий составляет только некоторую часть от целого, то значение k можно принять равным этой части. Традиционное выделение трех градаций успешности обучения («первая» — отлично, «вторая» — хорошо и «третья» — удовлетворительно) позволяет рассматривать множество значений k , состоящее из трех элементов $\{k_1 = 1; k_2 = 0,8; k_3 = 0,6\}$. Значение 0,8 соответствует доли оценки «4» относительно пяти, а значение 0,6 — доли оценки «3» относительно пяти. Значения параметров n_0 и N устанавливаются на основе обобщения результатов анализа учебного материала.

Содержание какой-либо темы, раздела или дисциплины можно представить в виде совокупности УЭ. Например, тема «Теория вероятностей» (ТВ), преподаваемая в рамках дисциплины «Математика» для студентов технических специальностей и направлений подготовки, может включать двенадцать УЭ [1]. Содержание УЭ: 1) вероятность элементарного события; 2) действия над событиями; 3) вероятность суммы несовместных и совместных событий; 4) вероятность произведения независимых и зависимых событий; 5) правила комбинаторики, сочетания, размещения и перестановки; 6) независимые повторные испытания; 7) формула полной вероятности и формула Байеса; 8) теорема Пуассона, локальная и интегральная теорема Муавра — Лапласа; 9) закон распределения дискретной случайной величины и ее характеристики; 10) биномиальный закон распределения и закон Пуассона; 11) плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины и ее характеристики; 12) нормальный, равномерный и показательный законы распределения непрерывной случайной величины.

Успешность изучения студентами темы ТВ опирается на систему ранее освоенных УЭ на предшествующих этапах обучения: 1) графики основных элементарных функций; 2) нахождение производной функции; 3) вычисление определенного интеграла; 4) нахождение несобственного интеграла. Представленная совокупность УЭ определяет значение параметра n_0 ($n_0 = 4$) в уравнении (2). С учетом доли правильного выполнения учебных заданий на предшествующих этапах обучения для трех градаций успешности обучения n_0 будет равно соответственно $n_{01} = 4$; $n_{02} = 3,2$; $n_{03} = 2,4$. Значение параметра N в уравнении (2) в этом случае можно принять равным 16 ($N = 12 + 4 = 16$).

Математические модели динамики количественных показателей освоения УЭ по теории вероятностей для трех градаций успешности обучения примут следующий вид:

$$n_1(t) = \frac{16e^t}{3 + e^t}, \quad (3)$$

$$n_2(t) = \frac{51,2e^{0,8t}}{12,8 + 3,2e^{0,8t}}, \quad (4)$$

$$n_3(t) = \frac{38,4e^{0,6t}}{13,6 + 2,4e^{0,6t}}. \quad (5)$$

Графические модели функциональных зависимостей (3)–(5) представлены на рис. 1.

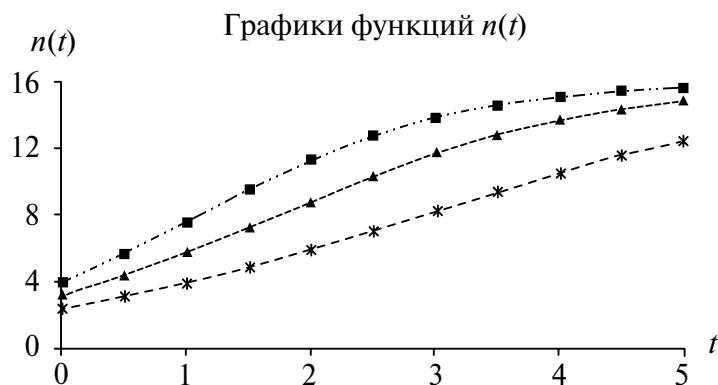


Рис. 1. Частные решения
логистического уравнения
—■— $n_1(t)$; ---▲--- $n_2(t)$; -*- $n_3(t)$;

Анализ функциональных зависимостей (3)–(5) показывает, что если $t \rightarrow \infty$, то $n(\infty) = 16$. Эта тенденция выполняется для всех трех функций и иллюстрирует тот факт, что познавательный процесс продолжается за рамками изучения темы ТВ, предусмотренной программой дисциплины. Представленные графические модели (рис. 1) создают возможность наглядно увидеть расхождения кривых, характеризующих различную степень успешности освоения УЭ.

Подсчет количества осваиваемых УЭ при изучении темы ТВ в каждом из пяти выделенных временных интервалов (рис. 1) для трех выделенных градаций успешности обучения производится по формуле

$$\Delta n_{ij}(t_j) = n_i(t_j) - n_i(t_{j-1}), \quad (6)$$

где $\Delta n_i(t_j)$ — количество УЭ, которые осваивают студенты, проявляющие i -ю градацию успешности в обучении ($i = 1; 2; 3$) в j -й единичный интервал времени t_j . Графики составленной функции $\Delta n_{ij}(t_j)$ для различных значений i (градации успешности обучения) и j (номер единичного интервала времени) изображены на рис. 2.



Рис. 2. Графические модели
скорости освоения УЭ
■ — $\Delta n_1(t)$; ▲ — $\Delta n_2(t)$; * — $\Delta n_3(t)$

Функциональные зависимости $\Delta n_{ij}(t_j)$ адекватно моделируют наблюдаемые в педагогической практике процессы освоения учебного материала студентами, проявляющими различную градацию успешности в обучении. Применение математического моделирования динамики освоения УЭ служит теоретической основой для проектирования преподавателям продолжительности этапов изучения содержания дисциплины.

Освоение студентами теории вероятностей может распределяться по двум, трем или четырем этапам учебной деятельности (УД). Первый этап УД — формирование системы знаний о вероятностных закономерностях. Второй — формирование умений применять вероятностные закономерности для решения стандартных математических задач. Третий — развитие исследовательских умений применять вероятностные закономерности при выполнении лабораторно-практических заданий. Четвертый — развитие культуры мышления и творческих способностей при решении нестандартных математических задач [5] на установление вероятностных закономерностей. Например, если на изучение ТВ отводится 72 академических часа или две зачетные единицы (з.е.), то в этом случае одному интервалу t будет соответствовать 14,4 часа или 0,4 з.е.

Возможный вариант прохождения этапов УД для трех выделенных градаций обучающихся при изучении темы ТВ за две з.е. представлен в таблице.

Продолжительность этапов УД

Группа студентов	Всего		Этап УД							
			I		II		III		IV	
	з.е	ч	з.е	ч	з.е	ч	з.е	ч	з.е	ч
$k_1 = 1$	2	72	0,8	28	0,6	20	0,4	16	0,2	8
$k_2 = 0,8$	2	72	1,0	36	0,6	20	0,4	16	—	—
$k_3 = 0,6$	2	72	1,2	44	0,8	28	—	—	—	—

Определение эффективности организации учебного процесса на основе представленного математического моделирования требует для подтверждения адекватности отражения рассматриваемого явления проведения педагогической диагностики с последующей обработкой результатов измерений с помощью методов математической статистики [6].

Литература

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. — 9-е изд., стер. М. : Высшая школа, 2003. 479 с. ISBN 5-06-004211-6.
2. Глоссарий. Федеральный портал «Российское образование». URL: www.edu.ru (дата обращения: 28.02.2014).
3. Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Симметрия и принципы инвариантности / пер. с англ. И. С. Емельяновой. — Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 421 с. ISBN 978-5-91326-027-7.
4. Куликова О. В. Диагностика качества освоения учебной дисциплины с позиции системного подхода : монография. — Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2012. — 112 с. ISBN 978-5-94614-253-3.
5. Куликова О. В., Чуев Н. П. Развитие творческих способностей и культуры мышления студентов вуза при изучении математики // Вестник УрГУПС, 2012, № 3 (15). С.120—128. ISSN 2073-0392.
6. Куликова О. В., Поповский Э. Е., Филиппова Е. Г. Выявление динамики математической подготовки студентов вуза по статистическим данным педагогических измерений // Современные про-

- блемы науки и образования. — 2013. — № 1; URL: www.science-education.ru/107-8568 (дата обращения: 01.03.2014).
7. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. — М. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 184 с. ISBN 5-93972-245-8.
 8. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2001. 320 с. 5-9221-0120-X.
 9. Солодова Е. А., Антонов Ю. П. Математическое моделирование педагогических систем // «Математика. Компьютер. Образование» : Сб. трудов XII международной конференции / под ред. Г. Ю. Ризниченко. Ижевск : Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. Т. 1. С. 113—121.

И. Н. Пирогова, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика»,
Уральский государственный университет путей сообщения

Проблемы недостаточной подготовки абитуриентов по математике и обучение в высшей школе

В последнее время проблемы почти всех вузов России связаны с низкой подготовкой абитуриентов, в частности по математике. Мы сталкиваемся с тем, что многие первокурсники не знают основ элементарной математики, таких как таблица умножения, действия с дробями, с отрицательными числами, с алгебраическими выражениями и других. Многие вузы решают эту проблему проведением дополнительных занятий в начале учебного года или в течение учебного года. УрГУПС пока ограничился проведением дополнительных занятий во второй половине каждого семестра, и то, в основном, эти занятия проводятся для студентов целевой формы подготовки. Но с каждым годом становится все яснее, что, принимая школьников с невысоким баллом по математике и сталкиваясь с их клиповым типом мышления, когда полученные знания все чаще почти мгновенно исчезают из их мыслей, придется задуматься о проведении дополнительных занятий, связанных с повторением школьного материала. УрГУПС уже давно проводит вводный контроль знаний по математике. И если

вначале это были мини-контрольные или вводный тест, создаваемый самими преподавателями, то теперь используется тест, созданный на сайте i-exam. Как правило, эти проверки показывают уровень знаний большинства студентов ниже 50 %, хотя при тестировании студентов уже в первом семестре от них требуется показать уровень не ниже 60 %.

Поэтому полезно проводить дополнительные занятия по повторению школьного курса элементарной математики (исключая те темы, которые даются в школе из курса высшей математики), начиная с начала семестра и, как показывает опыт других вузов и нашего тоже, их надо ставить в сетку расписания.

Исходя из опыта других вузов нужно перед конкретной темой повторять те разделы, которые здесь будут использоваться.

Таким образом, данный подход требует разработки не только календарного плана занятий по курсу высшей математики, но и разработки тематического плана занятий по повторению курса элементарной математики, с привязыванием по темам к курсу высшей математики. Тем самым осуществится непрерывная математическая подготовка студентов [2], которая в настоящее время терпит разрыв на уровне школа (11 класс) — вуз. Это происходит потому, что в школе был введен ЕГЭ. И при всех его некоторых положительных сторонах мы сталкиваемся и с негативными сторонами его введения. Об этом уже неоднократно говорили многие педагоги высшей школы [1], но повторимся. Была потеряна нацеленность работы педагогов на конечный результат в виде знания школьниками элементарной математики, и все силы брошены на натаскивание их на задачи, встречающиеся в ЕГЭ и которые не полностью отвечают требованиям, которые предъявляются к абитуриентам и первокурсникам при изучении высшей математики; такого исследования никто не проводил. А бросив взгляд на нынешний вариант ЕГЭ, можно сказать, что получить 3 балла (по старой шкале) стало очень просто с точки зрения преподавателя математики вуза и совсем непросто с точки зрения школьника. А из обязательных для знания школьников ушли такие понятия, как заучивание формул, ушел устный экзамен по геометрии, где их заставляли учиться говорить на математическом языке и строить логические цепочки при доказательстве теорем. В первом блоке ЕГЭ 2014 года нет ни решения более-менее сложных алгебраических уравнений, требующих применять знания по преобразованию алгебраических выражений, ни преобразований средней сложности тригонометрических выражений. Наши абитуриенты

плохо знают тригонометрию и не умеют решать логарифмические уравнения более сложного вида, чем представлены в первом блоке. Для большинства из них сложно решить задачу на движение, работу (это вообще из области фантастики), преобразовать выражения 12-го задания. Но при этом зачем-то были введены задачи по теории вероятности, которые школьники и не обязаны уметь решать, и зачем это надо делать в средней школе — непонятно многим математикам. В результате преподаватели вузов встречаются с таким контингентом, который им выдает школа, и их задача состоит в первую очередь в обучении студентов основам высшей математики, которую невозможно изучить без твердой базы знаний элементарной математики. И мы возвращаемся к проблеме: как поднять уровень знаний элементарной математики хотя бы до среднего. То есть выход пока виден только один: проведение дополнительных занятий. И возникает задача: увязать материал, изучаемый на первом курсе и особенно в первом семестре, с материалом средней школы, который надо повторить, а иногда и заново изучить со студентами первого курса для более удовлетворительного понимания курса высшей математики.

В результате нашего исследования была составлена таблица 1 соответствия материала, приведенного в заданиях ЕГЭ по математике, с теми разделами или темами, которые необходимо знать первокурснику для успешного усвоения материала математики первого семестра.

Таблица 1

Билет ЕГЭ	Первый семестр
Проценты, простейшие вычисления с числами	Действия с обыкновенными дробями, с отрицательными числами, степенями
Работа с диаграммами	Векторы и действия с векторами
Площади фигур на плоскости	Решение более сложных логарифмических, показательных, тригонометрических уравнений, но более простых, чем в части С
Применение математических вычислений в реальной жизни	Решение тригонометрических уравнений
Решение простейших логарифмических, показательных и т. п. уравнений	Применение тригонометрических преобразований, более свободное умение использовать эти формулы

Билет ЕГЭ	Первый семестр
Применение тригонометрии	Графики основных элементарных функций
Графики производных и первообразных	Области определения функций
Вычисление объемов	Основные свойства функций
Вычисление вероятностей	Нахождение корней квадратных уравнений
Применение математических формул в физике	Решений квадратных неравенств
Задачи на движение или работу	Решение линейных уравнений и неравенств
Задачи на наибольшее или наименьшее значение	Решение систем уравнений

Изучив еще раз требования к набору знаний первокурсника, которые мы создали, можно заметить, что эти задачи решаются в заданиях ГИА в 9 классе. Но, к сожалению, в связи с общей склонностью наших учеников к клиповому мышлению, что сразу становится заметным во время обучения в вузе, эти знания учащиеся не доносят до экзамена ЕГЭ, что приводит к отсутствию умений и навыков, которые так прекрасно описаны в кодификаторе требований к уровню подготовки выпускников по математике.

Исходя из структуры курса математики, который изучается на экономических специальностях — «Торговое дело», «Менеджмент», «Управление персоналом», «Туризм», — предлагается построить занятия следующим образом (таблица 2).

Перед изучением темы «Элементы линейной алгебры», куда входят такие элементы, как матрицы, определители, системы линейных уравнений, предлагаем повторять на дополнительных занятиях следующие разделы и понятия: 1. «Действия с числами, особенно с отрицательными и обыкновенными дробями», 2. «Решение систем уравнений простейшими методами — подстановкой и преобразованием», 3. Не забыть повторить таблицу умножения, 4. «Решение линейных уравнений и неравенств», 5. «Решение квадратных уравнений и неравенств».

При изучении темы «Элементы векторной алгебры», куда входят векторы и действия с ними, скалярное векторное и смешанное произведения и их приложения, рекомендуется повторять:

1) понятие вектора, хотя это и так приходится излагать и на лекции и отрабатывать на практических занятиях; 2) понятия перпендикулярности, коллинеарности и компланарности векторов; 3) понятия координат вектора, точки и их построение.

Таблица 2

Тема курса высшей математики первого семестра	Материал для повторения	Предполагаемые часы
Элементы линейной алгебры	Действия с отрицательными числами, с обыкновенными дробями	2
	Таблица умножения	2
	Решение систем уравнений	2
	Решение линейных уравнений и неравенств	2
Элементы векторной алгебры	Решение квадратных уравнений и неравенств	2
	Понятие вектора. Координаты точки, вектора. Действия с векторами	2
	Условия параллельности, перпендикулярности векторов	2
Элементы аналитической геометрии	Понятие линии, прямой на плоскости	2
	Угловой коэффициент прямой, условие параллельности и перпендикулярности прямых	2
	Уравнение окружности и параболы и их построение	2
Элементы математического анализа	Понятие функции, ее основные свойства	2
	Графики основных элементарных функций, их свойства	2
	Области определения функций, области значений	2
	Решение логарифмических, показательных, тригонометрических уравнений	2
Производная и ее приложение	Таблица производных и ее применение для простых функций	2
	Понятие выпуклости, возрастания функции	2

В теме «Аналитическая геометрия» используются те же знания, которые изучались ранее, кроме этого, не мешало бы повторить уравнение линии на плоскости, уравнение окружности и параболы в их простейшем виде. Также надо повторить формулы сокращенного умножения, которые используются при преобразовании уравнений кривых второго порядка.

Далее идет тема «Элементы математического анализа». Здесь рекомендуется повторить такие понятия: 1) функции и ее такие свойства, как четность и периодичность; 2) области определения и области значения функций; 3) графики основных элементарных функций и правила их построения. Кроме того, и свойства этих функций. Здесь же полезно вспомнить решения показательных и логарифмических уравнений.

При изучении тем «Производная» и «Приложения производной» используется предыдущий материал, в частности построение прямой на плоскости, и повторяются производные элементарных функций, которые изучаются в школе, так как основная задача высшей математики в вузе — научить брать производные сложных функций и производные высших порядков.

Надо отметить, что исходя из примерного количества времени получается, что весь первый семестр студенты должны изучать удвоенное количество часов по математике, что должно привести к повышению их математической подготовки, о чем свидетельствует опыт такой работы в других вузах.

Все повторенные или изученные темы будут использованы и при изучении разделов высшей математики второго семестра.

Сейчас в вузах высшая математика изучается как дисциплина «Математика» и, по-видимому, этим все сказано. Надо изучать математику с основ элементарной математики, но при этом добавив количество часов на ее изучение. Предполагаемое и выделяемое по учебным планам число часов на самостоятельную работу превосходит число аудиторных часов, но, как показывает практика, мало используется студентами, не привыкшими к самостоятельной работе, поэтому надо увеличивать число аудиторных часов, если мы хотим действительно чему-нибудь научить наших студентов.

Литература

1. Галимова Л. А., Панченко Е. И. Учет уровня подготовки абитуриентов при изучении курса основных глав курса высшей математики: «Актуальные проблемы преподавания математики в техническом

вузе». Материалы межвузовской научно-методической конференции. Омск : Изд-во «Омский гос.техн.ун-т», 2011. — С. 38—39.

2. Пирогова И. Н. Повышение качества образования за счет введения системы непрерывной математической подготовки / Экономика и педагогика профессионального образования : сб. научн тр. / под ред. В. А. Антропова. — Екатеринбург : Из-во УрГУПС, 2010. — Вып.86 (169). — С.105—110.

Е. А. Куталова, С. А. Неймышева,

филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральский государственный университет путей сообщения» в г. Нижнем Тагиле

Решение кейс-заданий по математике в рамках федерального интернет-экзамена в сфере профессионального образования

Многие вузы используют результаты компьютерного интернет-тестирования в рамках мониторинга уровня подготовки студентов на соответствие требованиям федеральным образовательным государственным стандартам (ФГОС). Решение задач в форме интернет-тестирования позволяет осуществлять единые требования к оценке качества подготовки специалистов на основе независимой внешней оценки.

Федеральный интернет-экзамен в сфере профессионального образования (ФЭПО) состоит из трех блоков. Первый и второй блоки представляют стандартные, типовые тестовые задачи, решение которых требует применения знаний на базовом уровне. Третий блок представлен кейс-заданиями, содержание которых предполагает использование комплекса умений и навыков, привлечение знаний из разных дисциплин и применение высокой логической и операционной культуры, поэтому студенты часто испытывают трудности при их решении. При выполнении кейс-заданий обучающимся необходимо за ограниченное время интенсивно находить в теоретической системе знаний востребованную информацию, осуществлять выбор наиболее оптимального метода решения задачи и преодолевать психологический дискомфорт от восприятия большого количества разнообразных данных [4].

Кейс-задания представляют собой сюжетные задачи трех типов. Включение в контрольно-измерительные материалы задачи первого типа предназначено для проверки у студентов умения составлять линейные математические модели на основе начальных данных, которые внесены в таблицу, находить значения переменных с помощью аппарата линейной алгебры и выполнять действия над матрицами. Содержание задачи второго типа ставит своей целью выявление у студентов умений конструировать нелинейные функциональные зависимости и осуществлять их исследование средствами дифференциального исчисления. Задачи третьего типа служат инструментом для диагностики у студентов умений преобразовывать графические модели в символические и находить значения искомых величин, применяя методы интегрального исчисления.

Содержание кейс-заданий, входящих в один из вариантов итогового тестирования математической подготовки студентов, обучающихся на специальности 271501.65 «Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей», представлено ниже.

Сюжетная задача первого типа. Предприятие производит изделия двух видов — S_1 и S_2 , используя для этого сырье двух типов — C_1 и C_2 . Нормы затраты сырья на единицу продукции каждого вида и объем расхода на 1 день представлены в таблице (таблица).

Данные о расходах сырья
на производимую предприятием продукцию

Нормы расхода сырья на единицу продукции (усл. ед.)	Вид сырья	
	C_1	C_2
Изделие S_1	a_{11}	a_{12}
Изделие S_2	a_{21}	a_{22}
Расход сырья на 1 день (усл. ед.)	b_1	b_2

Ежедневный объем выпуска изделий S_1 и S_2 составляет x_1 и x_2 ед. соответственно.

Необходимо: 1) составить математическую модель выпуска продукции и сравнить ее с предложенными системами уравнений; 2) найти объем выпускаемых изделий S_1 и S_2 (определить неизвестные x_1 и x_2); 3) установить стоимость сырья, затраченного на производство всех изделий S_1 и S_2 , если известна стоимость единицы сырья каждого типа [1].

Сюжетная задача второго типа. Из половины круглого бревна с радиусом R вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h (рис. 1). Оставшаяся часть бревна поступает в отходы.

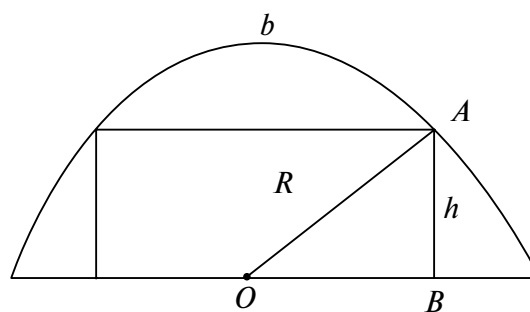


Рис. 1

Необходимо: 1) составить математическую модель площади поперечного сечения и определить точку локального экстремума полученной функции; 2) вычислить отношение значения функции в точке локального экстремума к значению функции в заданной точке [1, 2].

Сюжетная задача третьего типа. На рис. 2 изображен состоящий из отрезков прямых график скорости автомобиля $v(t)$ при его прямолинейном движении для $t_1 \leq t \leq t_2$, где t — время движения с момента старта, который состоит из отрезков прямых.

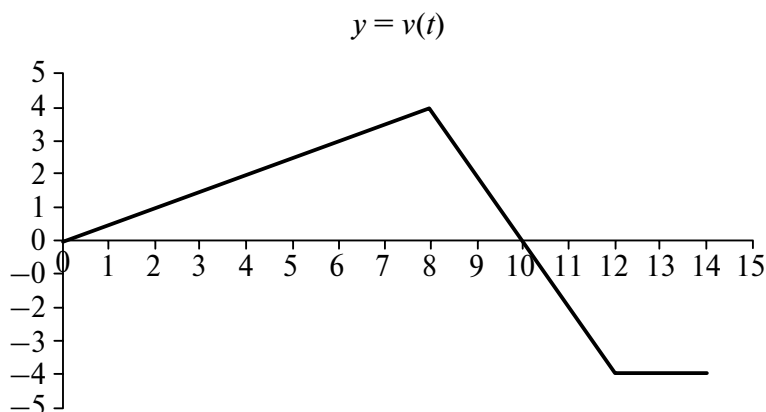


Рис. 2

Необходимо: 1) установить на отдельных временных интервалах от t_1 до t_2 особенности поведения функции $r(t)$, которая является первообразной от функции $v(t)$; 2) составить математическую модель движения автомобиля; 3) определить удаленность автомобиля от места старта за отмеченный период времени [2].

Методическая деятельность преподавателя при проектировании учебных занятий со студентами для формирования у них умений решать представленные выше кейс-задания включает шесть этапов:

организационный (структурирование программно-дидактического обеспечения учебного процесса по освоению дисциплины «Математика»);

мотивационный (активизация познавательной и мыслительной студентов по решению математических задач);

презентационный (представление содержания математической задачи);

коммуникационный (обсуждение со студентами разнообразных взаимосвязей начальных данных с искомыми величинами и построение процесса решения математической задачи);

аналитический (выделение оптимальности способа решения математической задачи);

диагностический (выявление пробелов в системе математических знаний и умений студентов).

Реализация таких действий приводит к тому, что студенты системно вовлекаются в решение учебно-тренировочных заданий, у них формируются устойчивые навыки точно и быстро решать задания интернет-тестирования и развиваются способности студентов находить оптимальные пути решения математических задач [3].

Разработка представленной методики педагогической деятельности преподавателя по формированию умений решать кейс-задания позволяет воспитывать и развивать системное мышление и структурное видение решения нестандартных задач. Формируемые у студентов интеллектуальные умения позволяют им эффективно раскрывать различные взаимосвязи, что крайне необходимо для успешного освоения учебных дисциплин основной образовательной программы.

Литература

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. — М. : АСТ, 2001. 656 с. ISBN 5-17-004601-4.
2. Дендюк Л. Решение текстовых математических задач разными способами в системе развивающего обучения Л. В. Занкова // Нач. шк., 2004.
3. Замков О. О. Математические методы в экономике : учеб. / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных / под ред. А. В. Сидорова. — 3-е изд., перераб. — М. : Дело и Сервис, 2001.
4. Рыжова И. Г. Развитие познавательного интереса учащихся на уроках математики. URL: <http://festival.1september.ru/articles/511104/> (дата обращения: 10.09.2014).

Раздел 3.

Математическое моделирование в исследовательской деятельности студентов

*Е. А. Букина, О. О. Ванцева, М. Ю. Филиппов, 3 курс, Кр.Л. Геут,
Уральский государственный университет путей сообщения*

Автоматизация алгоритма расширения бинарных полей

Необходимым условием правильной работы системы является обеспечение безопасности и защиты каналов связи. Особое значение это имеет для транспортных систем, в том числе и железнодорожных, так как, в отличие от стационарных систем связи, специфика обмена информацией на транспорте состоит в невозможности препятствия физическому проникновению злоумышленника в канал связи. Важной задачей является удаленное управление транспортными средствами с защитой информации от несанкционированного доступа к управлению; примером такого управления являются замки автомобильной сигнализации, отслеживание положения локомотива, связь диспетчера с машинистом, оформление и проверка проездных документов [1–3].

Такое управление осуществляется посредством запрограммированных дискретных устройств — конечных автоматов. Одним из примеров кодирующего аппарата является регистр сдвига с линейной связью (РСЛОС, Linear feedback shift register, LFSR). Он состоит из двух частей: собственно регистра сдвига и функции обратной связи. Регистр состоит из битов, его длина — количество этих бит.

Конечные автоматы, работа которых зависит от запрограммированного характеристического многочлена, нашли широкое

применение при построении (организации) каналов связи во всевозможных областях, в том числе и на транспорте. Важнейшим требованием совершенствования транспортных систем является безопасная передача управляющих и технологических сообщений и обеспечение защиты информационных систем от несанкционированных вмешательств.

Выбор характеристического многочлена равносильно построению регистра линейного сдвига. Период характеристического многочлена определяет цикл работы регистра сдвига. Поэтому актуальной задачей становится построение неприводимых многочленов для реализации экономических регистров сдвига с обратными связями, обладающими большими периодами работы в автономном режиме.

В работах [4, 5] рассмотрена идея квадратичного расширения конечных полей характеристики два и построено бинарное дерево посредством этого расширения путем применения операции $A: F(x) = f(x^2+x)$.

Рассмотрим этот процесс на примере.

Для примера возьмем симметричный многочлен шестнадцатой степени:

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Найдем его «многочлен-напарник», у которого корень имеет сдвиг, равный 1, т.е. $x + 1$:

$$\begin{aligned} & (x + 1)^{16} + (x + 1)^{15} + (x + 1)^{14} + (x + 1)^{13} + (x + 1)^{12} + (x + 1)^{11} + \\ & + (x + 1)^8 + (x + 1)^5 + (x + 1)^4 + (x + 1)^3 + (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = \\ & = (x^{16} + 1) + (x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + \\ & + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + (x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1) + \\ & + (x^{13} + x^{12} + x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x + 1) + (x^{12} + x^8 + x^4 + 1) + \\ & + (x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^3 + x^2 + x + 1) + (x^8 + 1) + (x^5 + x^4 + x + 1) + \\ & + (x^4 + 1) + (x^3 + x^2 + x + 1) + (x^2 + 1) + (x + 1) + 1. \end{aligned}$$

И после сокращений получаем:

$$x^{16} + x^{15} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1.$$

Перемножаем эти многочлены.

Результат:

$$x^{32} + x^{24} + x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{14} + x^{13} + \\ + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1.$$

Затем «подбираем» многочлен, из которого посредством операции A и получился многочлен 32-й степени:

$$(x^{32} + x^{16}) + (x^{24} + x^{20} + x^{16} + x^{12}) + (x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{14} + \\ + x^{13} + x^{12} + x^{11}) + (x^{20} + x^{18} + x^{12} + x^{10}) + (x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6) + \\ + (x^{10} + x^9 + x^6 + x^5) + (x^8 + x^4) + (x^6 + x^5 + x^4 + x^3) + (x^4 + x^2) + \\ + (x^2 + x) + 1.$$

После «сворачивания» степеней получаем искомый многочлен [6]:

$$x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Сложность расчетов связана с тем, что одни и те же вычислительные операции над конечным полем и полем рациональных чисел отличаются, в частности возведением в степень. Поэтому представление вычислений над конечным полем в виде операций над полем рациональных чисел и их автоматизация являются отдельной математической задачей.

Описанные выше расчеты были автоматизированы в программе Microsoft Office Excel.

Сначала в программе заполняется таблица степеней каждого многочлена 16 степени по «треугольнику Паскаля». Единица соответствует наличию степени (рис. 1).

Далее суммируются единицы в каждом столбце. И проверяется четность полученных значений. Таким образом, находится «многочлен-напарник».

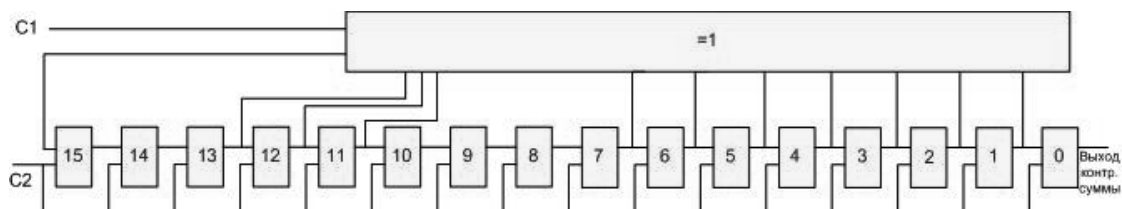
[illegible]

f_x =ЕСЛИ(((\$V\$9=0)+ИЛИ(Υ10=0);0;1)																																	
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	
																16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
																1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	
																1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
				1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
					1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
						1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
							0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
								0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
									1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
										0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
											0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
												1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	
													1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	
														1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	
															1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	
																1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	
																	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1				

Результатом этой операции является многочлен 32-й степени. Далее «подбирается» многочлен 16-й степени, из которого посредством операции A и получился многочлен 32-й степени. Для этого необходимо произвести обратную операцию A^{-1} , т. е. свернуть по формулам возведение в степени выражения $(x^2 + x)$. При

E5	$f_x = \text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{И}(\text{И}(\text{И}(\$D\$5=0)*\text{И}(E4=0))+\text{И}(\text{И}(\$D\$5=1)*\text{И}(E4=1));0;1))$																																	
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1		
32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
1																1																		
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
		0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
			0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
				0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
					0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
						0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
							0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
								0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
									0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
										0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
											0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
												0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
													0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1		
														0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
															0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	

Итог расчетов — искомый многочлен 16-й степени, полученный из многочлена 32-й степени посредством операции A . Аналогично рассчитываются остальные многочлены, которые можно представить в виде полного бинарного дерева [4, 5].



На рис. 4 представлен пример сдвигового регистра LFSR PnP. Plug and Play (PnP) дословно переводится как «включил и играй (работай)» — технология, предназначенная для быстрого определения и конфигурирования технических устройств.

Схеме на рис. 4 соответствует характеристический неприводимый многочлен $x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Период этого многочлена — период регистра сдвига — равен 4369, т. е. в автономном режиме с помощью этого регистра можно запрограммировать 4369 операций.

Таким образом, в данной работе был автоматизирован математический алгоритм расширения бинарных полей и построения неприводимых многочленов. Сгенерированные многочлены могут найти свое применение для программирования регистров сдвига, используемых в различных областях защиты информации и автоматизации систем. Конечные автоматы, работа которых зависит от запрограммированного характеристического многочлена, применяются при построении (организации) каналов связи во всевозможных областях, в том числе и на транспорте.

Литература

1. Болотов А. А., Гашков С. Б., Фролов А. Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: Алгебраические и алгоритмические основы. М. : КомКнига, 2006. 360 с. ISBN 5-484-00443-8.
2. Болотов А. А., Гашков С. Б., Фролов А. Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: протоколы криптографии на эллиптических кривых. М. : КомКнига, 2006. 280 с. ISBN 5-484-00444-6.
3. Глуско К. Л., Титов С. С. Специфика проблем связи и управления на транспорте // Инновационный транспорт. № 2 (3). 2012. С. 44—50.
4. Геут (Глуско) Кр. Л., Титов С. С. О свойствах поликвадратичных расширений бинарных полей / Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 44-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург : УрО РАН, 2013. С. 17—19.
5. Букина Е. А., Ванцева О. О., Филиппов М. Ю., Геут Кр. Л. Построение бинарного дерева посредством поликвадратичного расширения // Математическое моделирование системы взаимодействий прикладных исследований : сб. науч. тр. Екатеринбург : УрГУПС. Вып. 13 (196). 2013. С. 73—78. ISBN 978-5-94614-277-9.
6. Титов С. С., Торгашова А. В. Генерация неприводимых многочленов, связанных степенной зависимостью корней // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2 (22). 1. 2010. С. 310—318.

Расчет скорости вытекания жидкости из цистерн

На железной дороге встречаются нештатные ситуации. Часто за короткое время нужно понять, насколько опасной является эта ситуация. Нужно решить, справится ли с нею небольшая дежурная бригада или придется вызывать более серьезные силы. В зависимости от степени опасности нужно выбрать круг лиц, которые должны быть оповещены об этом. Важно правильно оценить время выхода из таких ситуаций и решить, нужно ли останавливать движение. При этом нежелательны как недооценка, так и переоценка опасности.

Железная дорога часто перевозит опасные жидкости. На станциях в цистернах хранятся запасы топлива, горюче-смазочные материалы. Рассмотрим вытекание жидкости через щель в цистерне. Применение математических методов позволит оценить резерв времени для организации ремонта цистерны.

Задача 1. Пусть на дне вертикального цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель. В течение первых суток вытекло 10 % содержимого. Скорость истечения жидкости пропорциональна высоте ее уровня в резервуаре. Определить, сколько времени потребуется, чтобы вытекла половина жидкости.

Для решения задачи введем следующие обозначения: R — радиус цилиндрического резервуара, h — высота цилиндра, $x(t)$ — высота уровня жидкости в резервуаре в момент времени t , $x'(t)$ — скорость изменения уровня жидкости.

Объем жидкости в момент времени t равен $Q = \pi R^2 x(t)$. Скорость изменения объема жидкости $V = \pi R^2 x'(t)$. Скорость изменения объема пропорциональна высоте уровня жидкости $V = kx$. Коэффициент пропорциональности k зависит от свойств жидкости. Уровень воды в цистерне в зависимости от времени будет определяться дифференциальным уравнением [1].

$$\pi R^2 x'(t) = kx.$$

Заменим производную $x'(t)$ на отношение дифференциалов. Разделим переменные в дифференциальном уравнении:

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx, \quad \pi R^2 \frac{dx}{x} = k dt.$$

Вычисляя интегралы правой и левой части, получим общее решение [2], содержащее произвольную постоянную C :

$$\pi R^2 \ln x = kt + C.$$

Вначале при $t = 0$ цилиндр полон, то есть $x = h$. Это условие дает возможность найти произвольную постоянную C :

$$\pi R^2 \ln h = C.$$

В результате получим частное решение дифференциального уравнения:

$$\pi R^2 (\ln x - \ln h) = kt; \quad \pi R^2 \ln \frac{x}{h} = kt.$$

Найдем коэффициент пропорциональности k , используя условие, что через сутки вытекло 10 % жидкости. Если $t = 1$, то $x = 0,9h$. Следовательно,

$$\pi R^2 \ln \frac{9}{10} = k.$$

Решение уравнения примет вид

$$t(x) = q \frac{\ln(x/h)}{\ln(9/10)}.$$

Если вытечет половина жидкости, то $2x = h$. Вычислим, сколько времени для этого потребуется:

$$t = q \frac{\ln(1/2)}{\ln(9/10)} = 6,57.$$

Итак, для истечения из резервуара половины жидкости через щель потребуется 6 суток и 14 часов.

Рассмотрим теперь общую постановку задачи.

Задача 2. Вертикальный цилиндрический резервуар высотой h метров и радиусом R метров наполнен жидкостью. На дне резер-

вуара образовалась щель, которую заметили через q часов. К этому времени высота жидкости составляла a метров. Скорость истечения жидкости пропорциональна высоте ее уровня в резервуаре. Сколько времени потребуется, чтобы высота жидкости составила b метров? Какой объем жидкости к этому времени вытечет?

Решение.

Скорость изменения объема жидкости пропорциональна высоте уровня жидкости. При коэффициенте пропорциональности k получим:

$$\pi R^2 x'(t) = kx, \quad \pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$\pi R^2 \frac{dx}{x} = k dt, \quad \pi R^2 \ln x = kt + C.$$

Вначале при $t = 0$ цилиндр полон, то есть $x = h$.

Это условие позволит найти произвольную константу C :

$$\pi R^2 \ln h = C.$$

В результате получим решение дифференциального уравнения:

$$\pi R^2 (\ln x - \ln h) = kt, \quad \pi R^2 \ln \frac{x}{h} = kt.$$

Найдем коэффициент пропорциональности k , используя условие, что через q часов высота жидкости составляла a метров. Если $t = q$, то $x = a$, тогда:

$$\pi R^2 \ln \frac{a}{h} = kq.$$

Решение уравнения примет вид

$$t(x) = q \frac{\ln(x / h)}{\ln(a / h)}.$$

Высота жидкости составит b метров, если пройдет $t(b)$ часов:

$$t(b) = q \frac{\ln(b/h)}{\ln(a/h)}.$$

К этому времени из резервуара вытечет $V = \pi R^2(h - b)$ м³ жидкости.

Задача 2 решена для произвольных параметров a, b, q . Выполним расчеты в системе MathCad, чтобы проследить влияние этих параметров на высоту жидкости в цистерне в различные периоды времени.

$$a: = 6, h: = 10, x: = 10, 9.5 \dots 2, q: = 1 \dots 5.$$

$$t(x, a, q) := q \frac{\ln(x/h)}{\ln(a/h)}.$$

На рис. 1 показаны графики изменения высоты жидкости в цистерне, если первоначальная протечка была обнаружена, когда уровень жидкости уже опустился с высоты 10 метров до высоты 6 метров. Если такой уровень был обнаружен уже через один час, жидкость будет вытекать быстро. До уровня двух метров она опустится через три с небольшим часа. Два других графика показывают более медленное снижение уровня жидкости.

На рис. 2 протечка была обнаружена на высоте 9 метров. Потеря жидкости в цистерне была сравнительно небольшой. Жидкость в дальнейшем будет вытекать медленнее. До уровня двух метров она будет опускаться от 15 до 45 часов, в зависимости от времени обнаружения протечки.

На рис. 3 показаны ситуации, когда протечку заметили через час. Если к этому времени жидкость опустилась до 9 метров, вытекание будет медленным. Уровень двух метров будет достигнут че-

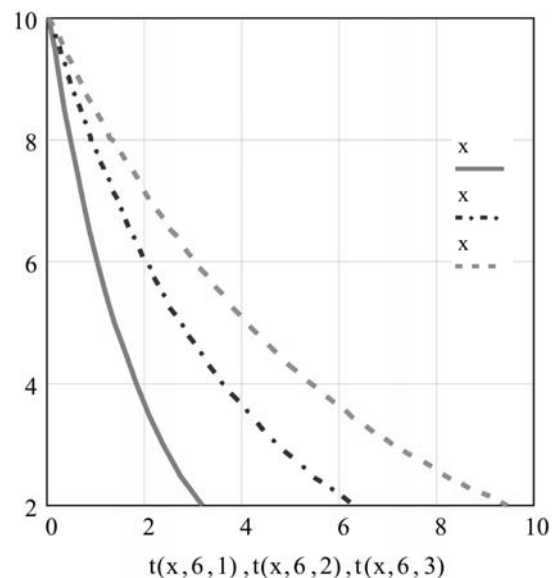


Рис. 1. Высота жидкости $x(t)$ в цистерне при обнаружении протечки на высоте $a = 6$ метров и различном времени ее обнаружения q
 ----- $q = 1$ час;
 · · · · · $q = 2$ часа;
 - - - - - $q = 3$ часа

рез 15 часов. В двух других случаях вытекание будет более быстрым. Так, при начальном уровне 8 метров и 6 метров до уровня двух метров жидкость опустится через 7 часов и 3 часа соответственно.

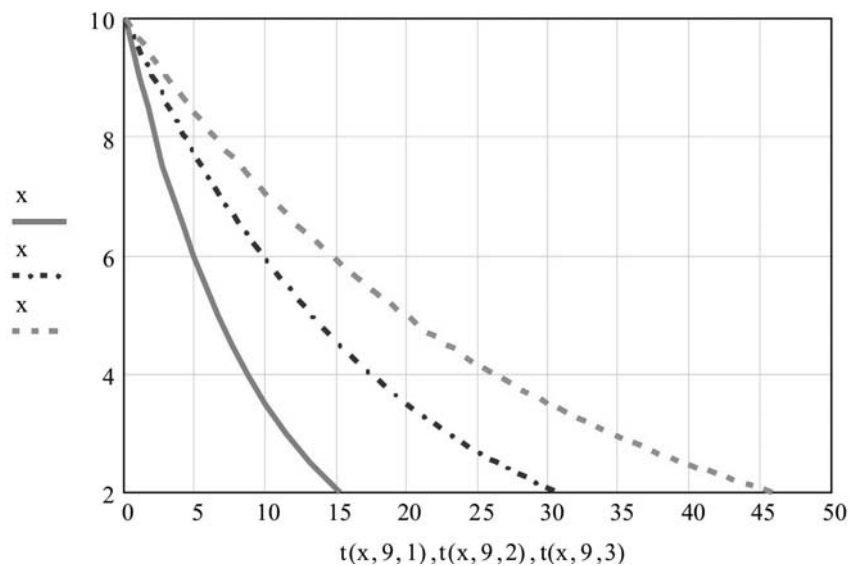


Рис. 2. Высота жидкости $x(t)$ в цистерне при обнаружении протечки на высоте $a = 9$ метров и различном времени ее обнаружения q
 ————— — $q = 1$ час; · — · — · — · — $q = 2$ часа;
 — — — — — $q = 3$ часа

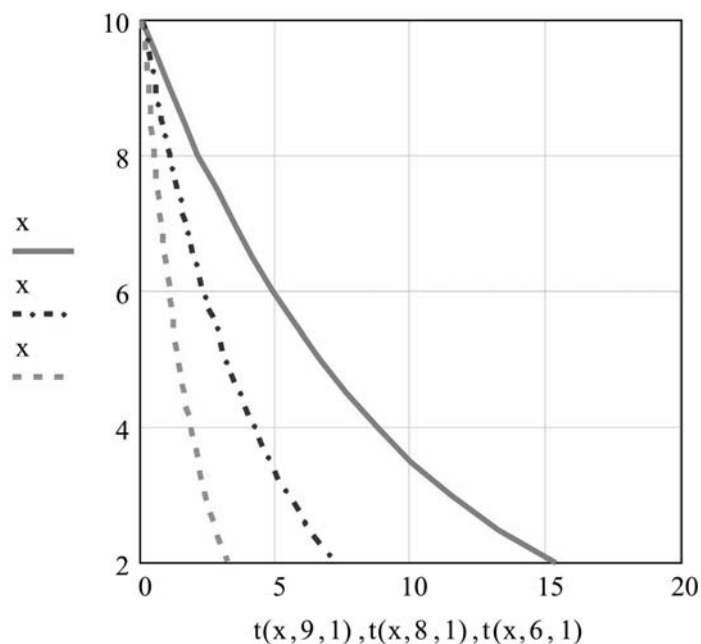


Рис. 3. Высота жидкости $x(t)$ в цистерне при обнаружении протечки через $q = 1$ час и различной высоте a в момент ее обнаружения
 ————— — $a = 9$ метров; · — · — · — · — $a = 8$ метров;
 — — — — — $a = 6$ метров

Таким образом, составлено и решено дифференциальное уравнение первого порядка для расчета скорости вытекания жидкости. Это дает возможность оценить резерв времени для организации ремонта цистерны. Вычисления выполнены в системе MathCad для цистерн различных размеров и различных свойств жидкости.

Литература

1. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. — М. : Наука, 1962. 184 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М. : Наука, 1992. 544 с.

Т. А. Волкова, канд. физ.-мат. наук, *Д. В. Сафронов*, 2 курс,
Уральский государственный университет путей сообщения

Влияние веса и тяги поезда на его скорость

На железной дороге особое внимание уделяется безопасности движения. Для этого полезно знать условия разгона и торможения поезда. Рассмотрим движение рудничных поездов и маневровых электровозов. Для них характерны небольшие скорости, поэтому движение можно исследовать с помощью достаточно простых дифференциальных уравнений. Сопротивление движению определяется зависимостью от скорости и веса поезда. Решение дифференциального уравнения первого порядка определяет изменение скорости.

Пусть поезд движется со скоростью V . Сопротивление движению поезда R зависит от веса поезда Q и определяется эмпирической формулой [1]:

$$R = (a + bV)Q.$$

Запишем уравнение равновесия для движения поезда, используя силу его инерции I , сопротивление движению R и силу тяги электровоза F : $I + R = F$.

На рис. 1 показана схема воздействия системы сил I , R , F на движение поезда.

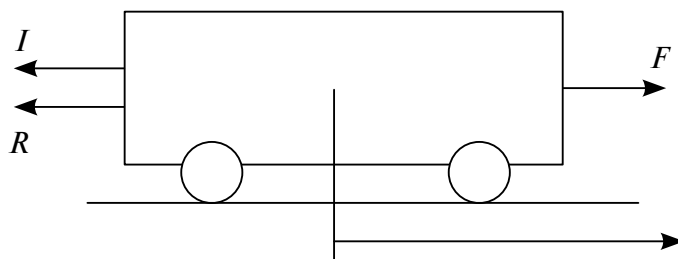


Рис. 1. Силы, влияющие на движение поезда

Обозначим $S(t)$ — путь, пройденный поездом за время t . Тогда $V = S'(t)$ — скорость движения, $V' = S''(t)$ — ускорение движения. Сила инерции I зависит от массы m поезда и ускорения движения.

$$I = mV'(t).$$

Вес поезда $Q = mg$ равен произведению его массы m на гравитационную постоянную $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. В результате уравнение равновесия примет вид

$$mV'(t) + (a + bV)mg = F. \quad (1)$$

Для решения этого дифференциального уравнения выполним алгебраические преобразования:

$$V'(t) + (a + bV)g = F/m, \quad V'(t) = F/m - (a + bV)g,$$

$$V'(t) = F/m - ag - bVg,$$

$$V'(t) = bg \left(\frac{F/m - ag}{bg} - V \right) = bg \left(\frac{F - aQ}{bQ} - V \right),$$

$$V' = (A - V)bg, \quad A = \frac{F - aQ}{bQ}.$$

Запишем производную скорости через отношение дифференциалов и разделим переменные V и t .

$$\frac{dV}{dt} = bg(A - V), \quad \frac{dV}{A - V} = bgdt. \quad (2)$$

Находим общее решение дифференциального уравнения, записывая произвольную константу в виде $\ln C$:

$$-\ln|A - V| = bgt + \ln C.$$

Постоянную C определяем из начального условия $V(0) = 0$, то есть в начальный момент времени $t = 0$ поезд не двигался и его скорость равнялась нулю. Следовательно,

$$-\ln A = \ln C, \quad C = \frac{1}{A}.$$

Найдем зависимость между временем t и набранной за это время скоростью V движения поезда.

$$\ln A - \ln|A - V| = bgt, \quad t = \frac{1}{bg} \cdot \ln \frac{A}{A - V}. \quad (3)$$

Перейдем к определению расстояния, на котором поезд достигнет после разгона заданной скорости. Воспользуемся свойствами дифференциала [2], чтобы найти зависимость между скоростью $V(t)$ и пройденным расстоянием $S(t)$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot V.$$

В результате преобразований дифференциальное уравнение движения поезда (2) примет вид

$$\frac{dV}{dS} V = bg(A - V).$$

Разделим переменные V и S и проинтегрируем обе части равенства:

$$\frac{V}{A - V} dV = bg dS, \quad \frac{V - A + A}{A - V} dV = bg dS,$$

$$\int \left(-1 + \frac{A}{A - V} \right) dV = bg \int dS, \quad -V - A \cdot \ln|A - V| + C = bgS.$$

Получив общее решение, постоянную C определим из начального условия задачи. Вначале скорость была равна нулю, поезд

не двигался, и пройденное им расстояние было равно нулю. Поэтому, если $V = 0$, то $S = 0$. Следовательно, $C = A \ln A$.

В результате получим зависимость пройденного поездом расстояния $S(t)$ от скорости движения $V(t)$.

$$S(V) = \frac{1}{bg} \left(-V + A \cdot \ln \frac{A}{A-V} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим числовой пример. При движении рудничного поезда [1] формула (1), связывающая скорость поезда V , его вес Q и сопротивление движению R , примет следующий вид:

$$R = (2,5 + 0,05V)Q.$$

Вес поезда измеряется в тоннах, а скорость — в м/с. Вес поезда с электровозом $Q = 40$ т, сила тяги электровоза $F = 200$ кг.

Найдем через сколько времени и на каком расстоянии рудничный поезд приобретает на горизонтальном участке пути скорость $V = 12$ км/ч.

Используя числовые данные задачи, вычислим параметр A :

$$A = \frac{F - aQ}{bQ} = \frac{200 - 2,5 \cdot 40}{0,05 \cdot 40} = \frac{100}{2} = 50.$$

Вычислим время достижения поездом скорости $V = 12$ км/ч, записав значение скорости в требуемой размерности; $V = 3,33$ м/с.

$$t = \frac{1}{bg} \cdot \ln \frac{A}{A-V} = \frac{1000}{0,05 \cdot 9,8} \cdot \ln \frac{50}{50 - 3,33} = 2041 \cdot \ln 1,07 = 141 \text{ с.}$$

Таким образом, скорость 12 км/ч будет достигнута поездом через 2 мин 21 с. Путь, пройденный поездом (см. формулу 4), к этому времени составит

$$S = \frac{1000}{0,05 \cdot 9,8} \left(-3,33 + 50 \cdot \ln \frac{50}{50 - 3,33} \right) = 237 \text{ м.}$$

Решение задачи (1)–(4) может быть использовано в достаточно широких диапазонах значений скорости и тяги поезда для маневровых и рудничных поездов.

Рассмотрим задачу о влиянии скорости на движение поезда, если вес поезда Q изменяется в диапазоне от 20 т до 80 т, а тяга поезда F изменяется от 100 кг до 300 кг. Выполним вычисления в системе MathCAD для поездов различного веса и силы тяги.

Запишем исходные данные задачи и расчетные формулы.

$$a:=2.5; b:=0.05; g:=9.8.$$

$$Q:=20, 25 \dots 80; F:=100, 110 \dots 80; V:=1, 1.5 \dots 5;$$

$$A(Q, F) := \frac{F - aQ}{bQ}; \quad t(V, Q, F) := \frac{1}{bg} \cdot \ln \frac{A}{A - V};$$

$$S(V, Q, F) := \frac{1}{bg} \left(-V + A(Q, F) \cdot \ln \frac{A(Q, F)}{A(Q, F) - V} \right).$$

На рис. 2 показано изменение времени t до достижения заданной скорости V для трех вариантов веса поезда Q и постоянном значении тяги поезда F .

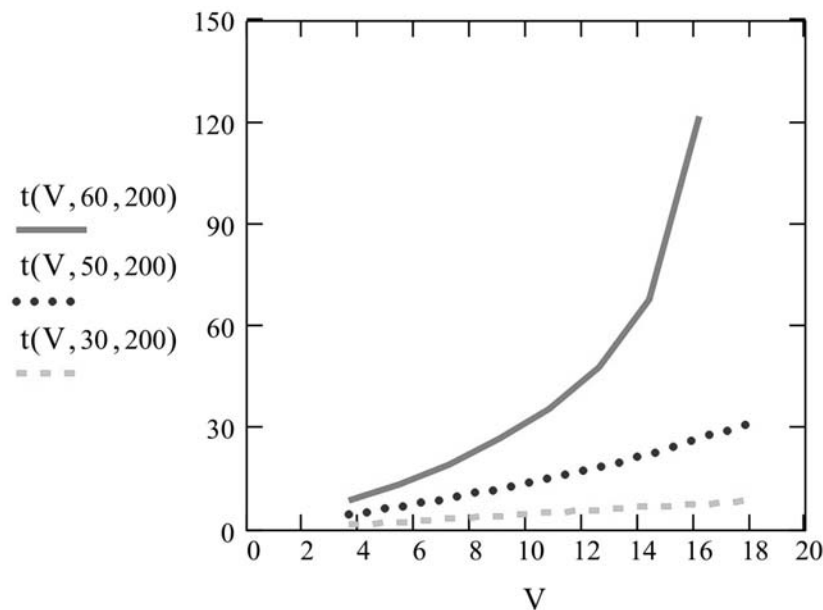


Рис. 2. Зависимость времени t , м, до достижения скорости V , км/ч при силе тяги $F = 200$ кг и различных значениях веса поезда
 — — — — — $Q = 60$ т; — $Q = 40$ т; - - - - - $Q = 20$ т

На рис. 3 показано изменение длины пути S времени t для достижения заданной скорости V при трех вариантах значения тяги поезда F и постоянном значении веса поезда Q .

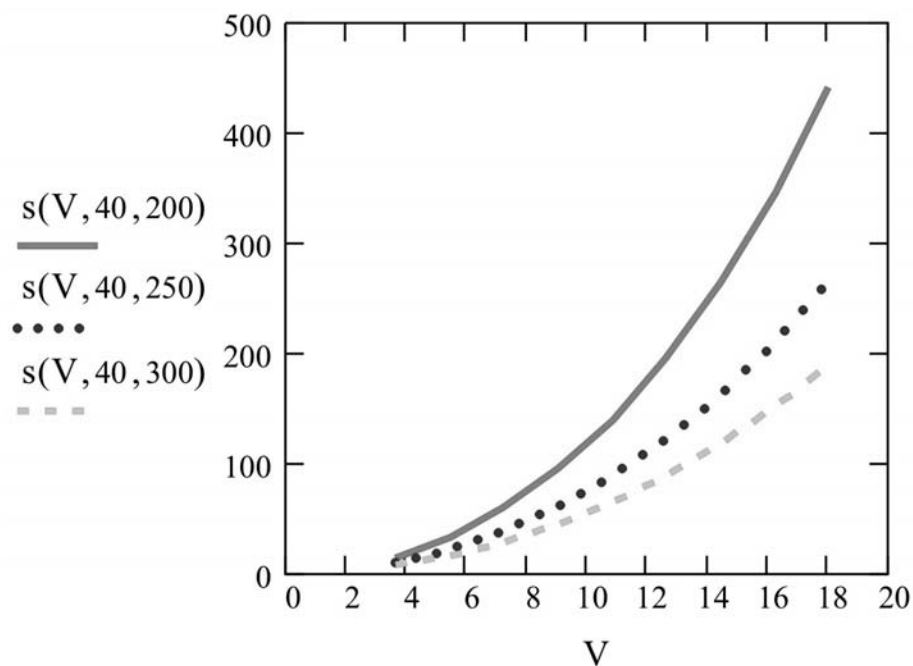


Рис. 3. Зависимость пути S , м, до достижения скорости V , км/ч при весе поезда $Q = 40$ т и различных значениях силы тяги
 ————— $F = 200$ кг; $F = 250$ кг; - - - - - $F = 300$ кг

Таким образом, разработан алгоритм расчета связи между весом, тягой, скоростью разгона поезда и расстоянием, на котором эта скорость достигается. Используются дифференциальные уравнения первого порядка. Расчеты проведены в системе MathCAD.

Литература

1. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. М. : Наука, 1962. 184 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. : Наука, 1992. 544 с.

О построении дискретно-непрерывной математической модели динамики численности подвижного состава

Поступательный и динамичный рост экономических показателей страны зависит от многих факторов, один из основных — обеспечение высокого уровня эффективного управления процессом перевозок грузов. Стабильность, устойчивость, скорость перевозок — главные составляющие эффективности транспортных услуг. Внедрение научных достижений и современных технологий, реализация строгой ритмичности в проведении графиков обследования подвижного состава, проведение качественного ремонта позволит обеспечить надежность транспорта, в том числе железнодорожного транспорта. Это особенно существенно, так как незапланированный и многочисленный вывод из эксплуатации подвижного состава в ремонт может привести к серьезным сбоям в обеспечении ритмичной работы всех звеньев перевозочного процесса. В целом, учет перечисленных показателей надежности транспорта приводит к сложной задаче.

Оптимальному решению указанных проблем во многом может помочь математическое моделирование. Отдельные элементы математического моделирования использовались со времен появления точных наук. Сущность математического моделирования состоит в замене исходного объекта моделью и изучении этой модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов, благодаря чему можно относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта [1].

В связи с широким внедрением в экономическую практику современных информационных технологий, математическое моделирование играет большую роль в решении транспортных проблем, оно дает возможность вскрыть общие закономерности наблюдаемых процессов и позволяет решать прикладные, практические задачи эксплуатации подвижного состава.

Математическое исследование транспортных потоков началось в пятидесятые годы прошлого столетия. Заметим, что в 1932 г. выдающимся русским математиком С.А. Чаплыгиным издана работа «Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда», в которой проведены исследования о влиянии профиля на работу железнодорожных поездов [2].

Первая в мировой литературе монография Ф. Хейта по теории транспортных потоков появилась только в 1963 г. [3]. Позднее в России и за рубежом опубликованы многочисленные книги и статьи, посвященные математическому моделированию транспортных систем. Для анализа использовались методы теории вероятностей и теории массового обслуживания. Для решения задачи применялись методы линейного программирования.

Целью настоящей работы является построение математической модели динамики численности вагонного парка в течение определенного периода эксплуатации подвижного состава. В соответствии с требованиями к построению математической модели, необходимо, чтобы данная модель содержала важные сведения об исследуемом объекте и могла быть с минимальными усилиями исследована, а также использована для планирования и прогнозирования численности вагонного парка.

В работе реализуется дифференциальная модель в виде системы с n -м количеством линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка. На основе построенной дифференциальной модели требуется найти аналитическое и численное решение системы, моделирующей процесс динамики подвижного состава, определить ее параметры, соответствующие рациональному режиму обследования, текущего и капитального ремонта средств подвижного состава, найти теоретическое обоснование эффективного управления всем этим процессом.

Методы решения. Используются аналитические методы теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и методами их решения в MathCAD 14 [4–6].

Дискретно-непрерывная, дифференциальная математическая модель разрабатывалась на основе изучения исходной информации, анализа статистических данных и установления закономерностей взаимодействия операторов вагонных парков, депо, ремонтных предприятий. Вывод дифференциальных уравнений основывается на учете реальных закономерностей, присущих исследуемому процессу.

Рассматривается определенное множество объектов подвижного состава, в частности вагонов некоторого предприятия. Каждый вагон из этого множества имеет в данный момент времени t за эксплуатационный период пробег S километров. Ремонт подвижного состава производится по истечении календарного срока или установленного пробега, в зависимости от того, что наступит раньше. Так, например, деповский ремонт всех типов грузовых вагонов, кроме вагонов специального назначения, производят:

- после производства деповского ремонта при достижении 100 тыс. км общего пробега, но не позже чем через два года эксплуатации;
- после производства капитального ремонта при достижении 160 тыс. км общего пробега, но не позже чем через два года эксплуатации;
- после постройки и капитального ремонта с продлением срока полезного использования при достижении 210 тыс. км общего пробега [7].

Капитальный ремонт производится через 10–12 лет, а нормативный срок службы грузовых вагонов составляет 25–32 года.

Обозначим $N(t)$ — количество объектов подвижного состава в момент времени t . Каждый вагон имеет пробег на этот период S километров, причем S изменяется от 0 до R , где R — максимальный пробег до капитального ремонта или списания.

Разобьем промежутки $[0; R]$ числовой оси S на n частей точками $r_0 = 0, r_1, r_2, \dots, r_n = R$. Тогда каждый вагон в зависимости от величины пробега S попадет в один из интервалов с численностью $x_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, n$. Таким образом, общее число вагонов $N(t)$ будет представлено суммой $x_i(t)$, где $x_i(t)$ — количество вагонов на участке $[r_{i-1}; r_i)$ с пробегом $S \in [r_{i-1}; r_i)$:

$$N(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t). \quad (1)$$

Пусть $y(t)$ — общее число вагонов, направленных на ремонт, а $z(t)$ — число вагонов, для которых ремонт завершен, и они готовы для дальнейшей эксплуатации.

Рассмотрим первый промежуток $S \in [0; r_1)$. На этом полуинтервале численность составляет $x_1(t)$ вагонов и эта численность из-

меняется с течением временем t . Скорость изменения будет $\frac{dx_1}{dt}$,

и она пропорциональна количеству вагонов $-\alpha_1 x_1(t)$ за счет перехода части вагонов на участок $[r_1, r_2)$ и выхода подвижного состава из строя. Скорость изменится из-за поступления из ремонта части отремонтированных вагонов $\gamma z(t)$ и благодаря приобретению новых вагонов и из других источников $-f_1(t)$. Таким образом, на участке $S \in [0; r_1)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha_1 x_1(t) + \gamma z(t) + f_1(t). \quad (2)$$

Для последующих промежутки, когда $S \in [r_{i-1}; r_i)$, где $i = 2, 3, \dots, n$. Скорость изменения на данных участках равна:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\alpha_i x_i(t) + \beta_{i-1} x_{i-1}(t) + f_i(t), \quad (3)$$

где равенство определяется скоростью убывания $-\alpha_i x_i$ — численности вагонов за счет перехода их на соседний участок из-за увеличения пробега S , $\beta_{i-1} x_{i-1}$ — увеличения за счет прибытия из предшествующего участка и f_i — поступления из ремонта или других источников, имеющих пробег, соответствующий участкам $[r_{i-1}; r_i)$. Коэффициент α_i регулирует также выбывание вагонов за счет поломки, аварий и так далее.

Аналогично можно составить дифференциальные уравнения, описывающие состояние ремонта вагонов и его завершение:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha_{n+1} y(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i(t), \quad (4)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\alpha_{n+2} z(t) + \delta y(t), \quad (5)$$

где коэффициенты μ_i характеризуют поступление вагонов в ремонтные предприятия или депо с каждого участка, δ — скорость завершения ремонта.

Таким образом, получена система $n + 2$ дифференциальных уравнений.

Система имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= -\alpha_1 x_1(t) + \gamma z(t) + f_1(t) \text{ для } 0 \leq S < r_1, \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= -\alpha_2 x_2(t) + \beta_1 x_1(t) + f_2(t) \text{ для } r_1 \leq S < r_2, \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= -\alpha_n x_n(t) + \beta_{n-1} x_{n-1}(t) + f_n(t) \text{ для } r_{n-1} \leq S \leq R, \\
\frac{dy(t)}{dt} &= -\alpha_{n+1} y(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i(t), \\
\frac{dz(t)}{dt} &= -\alpha_{n+2} z(t) + \delta y(t).
\end{aligned} \tag{6}$$

Исследуемый процесс описывает динамику конкретных объектов и носит дискретный характер, однако опыт анализа дискретных объектов позволяет описать процессы с помощью непрерывных функций. Поэтому в дальнейшем будем считать, что функции $x_i(t), f_i(t)$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $y(t), z(t)$ являются непрерывными положительными, имеющими непрерывные производные первого порядка. Коэффициенты $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n + 2$, $\beta_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$, $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$, δ — положительные постоянные, которые определяются на основе многолетнего статистического анализа эксплуатации подвижного состава.

Система (7) достаточно сложна, и на первом этапе решим задачу Коши или задачу с начальными условиями для системы с n уравнениями, считая, что поступления вагонов из ремонта будут учтены функцией $f_1(t)$. Получим неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= -\alpha_1 x_1(t) + f_1(t) \text{ для } 0 \leq S < r_1, \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= -\alpha_2 x_2(t) + \beta_1 x_1(t) + f_2(t) \text{ для } r_1 \leq S < r_2, \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= -\alpha_n x_n(t) + \beta_{n-1} x_{n-1}(t) + f_n(t) \text{ для } r_{n-1} \leq S \leq R.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для системы (7) определены начальные условия

$$\overrightarrow{x_i(t)}\big|_{t=0} = x_{i0}, i = 1, 2, 3 \dots n, \quad (8)$$

причем $\sum_{i=1}^n x_i(0) = N_0$, где N_0 — начальное общее число вагонов.

Обозначим:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

— матрицу-столбец неизвестных функций, выражающих численность объектов подвижного состава по величине пробега;

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

— матрицу-столбец известных функций, характеризующих скорость поступления новых и после ремонта объектов. Тогда система (7) запишется в матричном виде:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + F(t), \quad (9)$$

где A — матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & -\alpha_n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Решим задачу Коши для системы однородных дифференциальных уравнений с начальными условиями (8). Первое дифференциальное уравнение системы является линейным уравнением первого порядка, которое имеет решение [4]:

$$x_1(t) = e^{-\alpha_1 t} \left[x_{10} + \int_0^t f_1(\tau) e^{\alpha_1 \tau} d\tau \right] = \varphi_1(t). \quad (11)$$

Обозначим для краткости решение первого уравнения за $\varphi_1(t)$. Тогда

$$\frac{dx_2(t)}{dt} + \alpha_2 x_2(t) = \beta_1 \varphi_1(t) + f_2(t); \quad (12)$$

полученное дифференциальное уравнение также является линейным уравнением первого порядка и его решение имеет вид

$$x_2(t) = e^{-\alpha_2 t} \left[x_{20} + \int_0^t (\beta_1 \varphi_1(\tau) + f_2(\tau)) e^{\alpha_2 \tau} d\tau \right] = \varphi_2(t). \quad (13)$$

Обозначим это решение за $\varphi_2(t)$.

Продолжая последовательно выполнять аналогичные действия, найдем решение:

$$x_k(t) = e^{-\alpha_k t} \left[x_{k0} + \int_0^t (\beta_{k-1} \varphi_{k-1}(\tau) + f_k(\tau)) e^{\alpha_k \tau} d\tau \right], \quad (14)$$

где $k = 3, 4, \dots, n$, а φ_{k-1} — решение предыдущего дифференциального уравнения системы (7). Предположим, что функции $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ограничены, то есть $|f_i(t)| < A$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогда для всех $t \in [0, T]$ получим неравенства:

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq e^{-\alpha_1 t} \left[x_{10} + \int_0^t |f_1(\tau)| e^{\alpha_1 \tau} d\tau \right] \leq e^{-\alpha_1 t} \left[x_{10} + \frac{A}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t} (t) \right] = \\ &= e^{-\alpha_1 t} x_{10} + \frac{A}{\alpha_1} t \leq x_{10} + \frac{A}{\alpha_1} t < B = \text{const.} \end{aligned}$$

Окончательно: $|x_1(t)| < B$.

Можно получить аналогичные неравенства для всех последующих уравнений системы (7).

Если предположить существование двух $x_1(t)$ и $x_2(t)$ решений системы (7) с начальными условиями (8), то функция $y_i(t) = x_2(t) - x_1(t)$ удовлетворяет однородной системе (7) для функции $y_i(t)$, то есть все $f_i = 0$ и нулевым начальным условиям, или $y_{i0} = 0$ для $i = 1, 2, 3 \dots n$.

Таким образом, $x_1(t) = x_2(t)$ и для (7)–(8) существует только единственное решение.

На основании вышеизложенного доказана

Теорема. Пусть функции $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывны на некотором замкнутом отрезке $t \in [0, T]$, то задача Коши для неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка (7) имеет единственное ограниченное решение:

$$x_k(t) = e^{-\alpha_k t} \left[x_{k0} + \int_0^t (\beta_{k-1} \phi_{k-1}(\tau) + f_k(\tau)) e^{\alpha_k \tau} d\tau \right],$$

где $k = 1, 2, \dots, n$, а ϕ_k , $k = 2, \dots, n$, — решение предыдущего, по отношению к числу k , дифференциального уравнения системы (7).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Рассматривается система, аналогичная системе (7) для $n = 3$. Зададим начальное и конечное значения t : $t_0 := 0$ и $t_1 := 100$. Составим систему трех уравнений с начальными условиями:

Given

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= -0.3 * x_1(t) + 7 \\ \frac{d}{dt} x_2(t) &= -0.4 * x_2(t) + 0.2 * x_1(t) + 3 \\ \frac{d}{dt} x_3 &= -0.35 * x_3(t) + 0.2 * x_2(t) + 4 \\ x_1(t_0) &= 20 \\ x_2(t_0) &= 15 \\ x_3(t_0) &= 25 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &:= \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, t, t_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

График решения системы представлен на рис. 1.

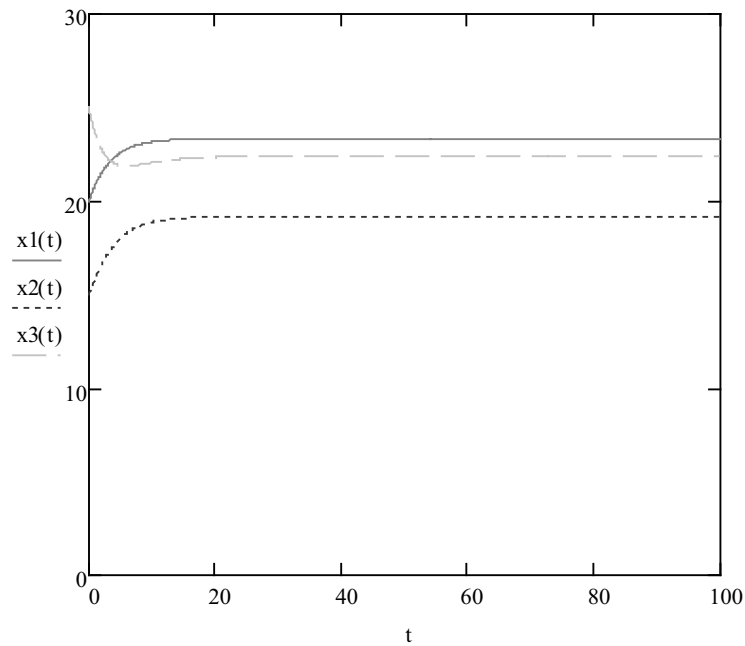


Рис. 1

По графику видно, что если неизвестная функция $f(x)$ — const, то в начальный период времени, примерно до 20 временных единиц, численность вагонов на участке изменяется, в течение последующего временного промежутка количество объектов подвижного состава стабилизируется и становится неизменным.

Пример 2. Возьмем для функций $f(t)$ периодические функции, начальное и конечное значения t остались прежними:

Given

$$\frac{d}{dt}x1(t) = -0.3 * x1(t) + 5 + 2 * \sin(0.2 * t)$$

$$\frac{d}{dt}x2(t) = -0.4 * x2(t) + 0.2 * x1(t) + 3 * \cos(0.3 * t)$$

$$\frac{d}{dt}x3 = -0.35 * x3(t) + 0.2 * x2(t) + 2 * \cos(0.4 * t)$$

$$x1(t0) = 20$$

$$x2(t0) = 15$$

$$x3(t0) = 25$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x1 \\ x2, t, t1 \\ x3 \end{pmatrix} \right]$$

График решения системы представлен на рис. 2.

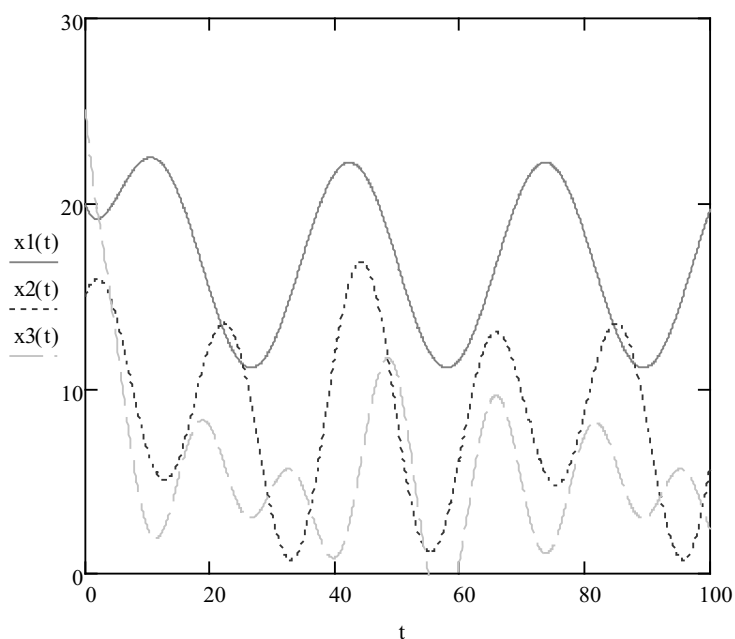


Рис. 2

Исследуя графики на рис. 2, заметим, что если неизвестная функция $f(x)$ — периодическая, то и динамика численности вагонного парка предприятия периодически изменяется на протяжении всего эксплуатационного периода. По графикам из первого и второго примеров можно определить количество объектов подвижного состава в любой момент времени. Так, например, на рис. 2:

$$N(40) = x_1(40) + x_2(40) + x_3(40) = 22 + 12 + 1 = 35(54).$$

Пример 3. Рассмотрим решение системы, описывающей объекты подвижного состава:

- эксплуатационные $x(t)$,
- ремонтируемые $y(t)$,
- отремонтированные $z(t)$.

Составим систему, аналогичную системе (6), с начальными условиями:

Given

$$\frac{d}{dt}x(t) = -0.3 * x(t) + 3 + 2 * \sin(0.3 * t) + 0.12 * z(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -0.4 * x(t) + 3 * y(t) + 0.3 * \sin(0.2 * t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = -0.35 * z(t) + 0.2 * y(t)$$

$$x(t_0) = 20$$

$$y(t_0) = 15$$

$$z(t_0) = 25$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x1 \\ x2, t, t1 \\ x3 \end{pmatrix} \right]$$

График решения системы представлен на рис. 3.

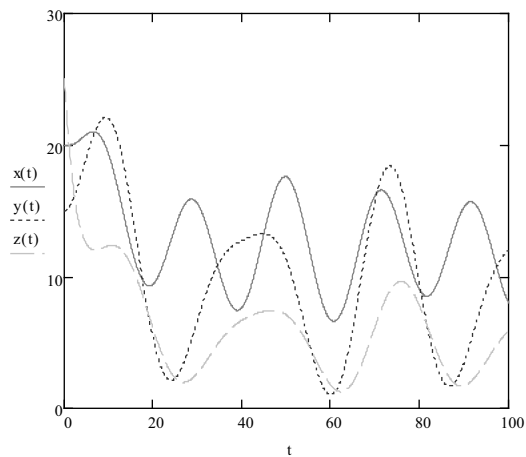


Рис. 3

График зависимости отремонтированных вагонов от ремонтируемых представлен на рис. 4.

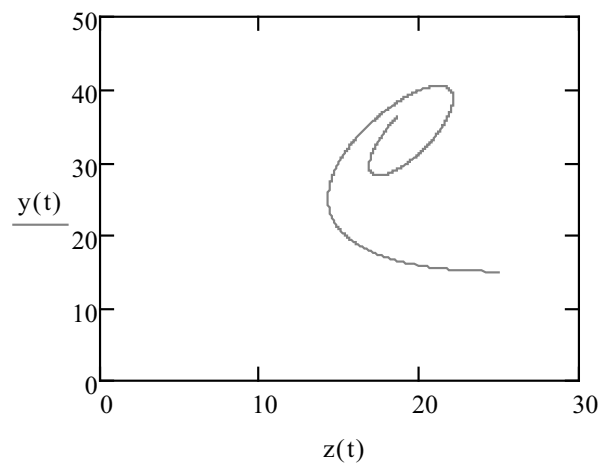


Рис. 4

Выводы

1. На основании анализа динамики численности вагонов предприятия можно сделать вывод, что построенная математическая модель адекватно отражает реальные процессы динамики численности подвижного состава, а результаты статистического анализа позволяют определить значения коэффициентов и функций, входящих в уравнения системы (7).

2. Определять общую численность объектов подвижного состава в любой момент времени по формуле:

$$N(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t).$$

3. Анализировать динамику распределения объектов по различным интервалам пробега подвижного состава.

4. Построенная дискретно-непрерывная модель может быть использована для практических целей и прогноза численности вагонного парка предприятия в указанный момент времени и при определенных значениях постоянных коэффициентов α_i , β_i , μ_i , γ , δ и функций $f_i(t)$.

Литература

1. Самарский А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов — М. : Физматлит, 2002. 320 с. ISBN 5-9221-0120-X.
2. Чаплыгин С. А. Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. — М. : Наука, 1976. 496 с.
3. Хэйт Ф. Математическая теория транспортных потоков. — М. : Мир, 1996. 287 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М. : Ком-книга, 2006. 472 с. ISBN 5-484-00459-4.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнения / под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник. — М. : Изд-во МГУ, 1984. 296 с.
6. Макаров Е. Г. MathCAD 14. — СПб : Питер, 2009. 384 с. ISBN 978-5-388-00201-3.
7. Об изменении периодичности плановых видов ремонта грузовых вагонов колеи 1520 мм: приказ МПС РФ от 18.12.1995 г. № 7ЦЗ. URL: <http://forpost-perm.narod.ru/docs/7cz.doc> (дата обращения: 11 ноября 2013).
8. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. — М. : Мир, 1983. 396 с.

Научное издание

Математическое моделирование в решении прикладных задач

Научные редакторы — Г. А. Тимофеева, О. В. Куликова
Редактор Л. С. Барышникова
Верстка — А. В. Трубин

Подписано в печать 02.02.2015.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5,1.
Тираж 100 экз. (1-й з-д 1–50). Заказ 32.
УрГУПС
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66.
Тел.: (343) 221-24-90